

Penghitungan Numerik Beban Kritis Buckling Struktur Kolom Taper Akibat Beban Tekan Aksial Berbasiskan Metode Beda Hingga

Eka Satria^{1,a*}, Farla Kurnia², Jhon Malta³ dan Mulyadi Bur^{4,b}

^{1,2,3,4}Jurusan Teknik Mesin Universitas Andalas Padang-Sumatera Barat

^aekasatria@ft.unand.ac.id, ^bmulyadibur@ft.unand.ac.id

Abstrak

Struktur rangka batang dengan geometri bervariasi sangat banyak digunakan dalam berbagai aplikasi teknik di lapangan. Alasan utamanya adalah karena penggunaan elemen seperti ini dapat mereduksi berat dari sistem secara keseluruhan sehingga akhirnya mampu menurunkan biaya konstruksi. Salah satu kasus khusus yang ditunjukkan kondisi di atas adalah struktur kolom dengan penampang yang berubah secara linear atau kolom taper. Makalah ini ditujukan untuk menghitung kekuatan kritis struktur kolom berbentuk taper melalui pendekatan numerik berdasarkan konsep metode beda hingga. Kemudian berdasarkan hasil-hasil penghitungan numerik ini direkomendasikan suatu persamaan bantu sederhana untuk memprediksi beban kritis buckling kolom taper untuk berbagai aplikasi praktis di lapangan .

Kata kunci : **Kolom, Buckling, Taper, Metode Beda Hingga, Beban Kritis**

Pendahuluan

Kolom merupakan salah satu contoh elemen struktur yang dapat menahan beban tekan dengan dimensi panjang yang jauh lebih besar dibandingkan ukuran penampang melintangnya. Penggunaannya yang beragam membuat perancangan kolom mendapat perhatian yang cukup serius oleh para perancang sejak dahulu. Masalah terpenting yang terjadi pada kolom adalah karena geometrinya yang langsing berpotensi menimbulkan ketidakstabilan, dimana akibat suatu pembebanan, kolom secara tiba-tiba dapat mengalami perpindahan yang cukup besar (tertekuk atau *buckling*).

Fenomena *buckling* pada kolom merupakan model sederhana untuk menggambarkan masalah stabilitas struktur, dimana dalam sejarah hal ini pertama kali dipecahkan oleh Euler pada tahun 1744 [1]. Dengan menggunakan persamaan Euler tersebut, para perancang dengan mudah dapat menentukan besarnya beban kritis suatu kolom yang menyebabkan terjadinya *buckling*. Akan tetapi penggunaan persamaan ini terbatas pada suatu kondisi ideal dimana kolom dianggap memiliki penampang yang seragam di sepanjang batang, geometri yang

lurus sempurna (tidak ada cacat geometri), dan lokasi pembebanan yang segaris dengan sumbu kolom. Diluar batasan tersebut persamaan Euler tidak akan memberikan hasil seperti yang diharapkan.

Kenyataan di lapangan, perancangan kolom dengan penampang bervariasi sangat banyak ditemukan dalam rekayasa struktur. Alasan utamanya adalah karena penggunaan elemen seperti ini dipertimbangkan mampu mereduksi berat struktur secara keseluruhan sehingga akhirnya mampu menurunkan biaya konstruksi.

Berbagai penelitian telah dilakukan sebelumnya untuk menghitung kekuatan *buckling* kolom dengan penampang bervariasi, baik dalam bentuk kolom bertingkat maupun berbentuk taper.

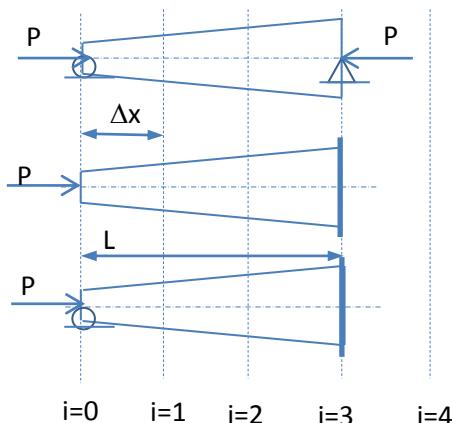
Untuk kolom bertingkat, Chen [2] telah memberikan suatu persamaan analitik untuk menghitung kekuatan *buckling* kolom bertingkat dua segmen yang dijepit pada sisi bagian bawahnya dan dibebani secara tekan aksial pada sisi atasnya dengan konsep mekanika benda padat. Terakhir, Satria et.al [3] memberikan persamaan pendekatan yang lebih umum untuk menghitung kekuatan

buckling struktur kolom bertingkat dua segmen dengan beban yang berbeda pada tiap segmen melalui pendekatan analitik dan numerik.

Untuk kolom berbentuk taper, sangat sulit untuk mendapatkan kekuatan kritis *buckling* melalui penghitungan secara analitik. Hal ini disebabkan karena penghitungan analitik memerlukan persamaan umum dari lendutan kolom. Pada kolom taper, persamaan ini merupakan persamaan nonsimetri yang sangat dipengaruhi oleh rasio penampang atas dan penampang bawah kolom. Untuk mendapatkan persamaan ini secara analitik memerlukan analisa matematika yang sangat rumit.

Untuk mengatasi permasalahan di atas, makalah ini menggunakan pendekatan numerik berbasiskan konsep beda hingga (MBH) untuk menghitung beban kritis *buckling* pada kolom taper. Metode beda hingga dipilih karena metode ini tidak memerlukan asumsi bentuk umum lendutan dalam proses penghitungannya. Kemudian MBH juga sangat mudah dimengerti dan sangat sederhana jika diubah ke dalam bahasa komputasi.

Ada dua tujuan utama yang akan disampaikan dalam makalah ini: (i) menghitung beban kritis *buckling* dan bentuk lendutan struktur kolom taper dengan konsep MBH, (2) menemukan persamaan desain sederhana yang dapat direkomendasikan dalam desain praktis di lapangan.



Gambar 1. Pemodelan kolom taper dengan tumpuan (a). pin-roller (atas), (b). jepit-bebas (tengah), dan (c). jepit-roller (bawah)

Metode Analisis

Ada tiga jenis tumpuan untuk kolom taper yang akan digunakan dalam analisa, seperti ditunjukkan dalam Gambar.1 [4].

A. Kolom Taper Tumpuan Pin-Roller

Persamaan dasar lendutan pada kolom dengan tumpuan *pin-roller* akibat pembebahan tekan aksial dapat dituliskan sebagai berikut:

$$M = -Py = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1)$$

Jika persamaan MBH diterapkan dalam Pers.(1) di atas maka akan diperoleh:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2}$$

atau

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -\frac{P\Delta x^2}{EI} \frac{1}{I_1} y_i \quad (2)$$

Jika diasumsikan $\omega = \frac{P\Delta x^2}{EI}$ dan kolom dibagi dalam misal 3 segmen (lihat Gambar.1), sehingga $\Delta x = L/3$, maka Pers.(2) dapat diubah sebagai berikut:

$$y_0 - 2y_1 + y_2 + \frac{\omega}{I_1} y_1 = 0 \quad (3)$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 + \frac{\omega}{I_2} y_2 = 0 \quad (4)$$

Kemudian dengan memasukan kondisi syarat batas diperoleh $y(x = 0) = y_0 = 0$ dan $y(x = L) = y_3 = 0$. Pers.(3) dan (4) selanjutnya dapat dituliskan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega/I_1 & 0 \\ 0 & -\omega/I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Dari Pers.(5) ini dapat dihitung harga beban kritis $P = \frac{\omega E}{\Delta x^2}$ dan modus *buckling* kolom tersebut dapat dilihat dari *eigen vektornya*.

B. Kolom Taper Tumpuan Jepit-Bebas

Persamaan dasar lendutan pada kolom dengan tumpuan jepit-bebas akibat pembebahan tekan aksial dapat dituliskan sebagai berikut:

$$M = P(y_0 - y) = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (6)$$

Jika persamaan MBH diterapkan dalam Pers.(1) di atas maka akan diperoleh:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2}$$

atau

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \omega \frac{1}{I_1} (y_0 - y_i) \quad (7)$$

Seperti halnya model pertama, kolom kembali dimisalkan dibagi dalam 3 segmen (lihat Gambar.1), maka Pers.(7) dapat diubah sebagai berikut:

$$y_0 - 2y_1 + y_2 - \frac{\omega}{I_1} (y_0 - y_1) = 0 \quad (8)$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 - \frac{\omega}{I_2} (y_0 - y_2) = 0 \quad (9)$$

$$y_2 - 2y_3 + y_4 - \frac{\omega}{I_3} (y_0 - y_3) = 0 \quad (10)$$

Kemudian dengan memasukan kondisi syarat batas diperoleh $y'(x = L) = 0 \rightarrow y_4 = y_2$ dan $y(x = L) = y_3 = 0$. Pers.(8), (9) dan (10) selanjutnya dapat dituliskan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{I_1} & -\frac{\omega}{I_1} & 0 \\ \frac{\omega}{I_2} & 0 & -\frac{\omega}{I_2} \\ \frac{\omega}{I_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Dari Pers.(11) ini dapat dihitung harga beban kritis $P = \frac{\omega E}{\Delta x^2}$ dan modus *buckling* kolom tersebut dapat dilihat dari *eigen vektornya*.

C. Kolom Taper Tumpuan Jepit-Roller

Persamaan dasar lendutan pada kolom dengan tumpuan jepit-*roller* akibat pembebahan tekan aksial dapat dituliskan sebagai berikut:

$$M = -Py - Vx = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (12)$$

Dimana V adalah gaya geser sejarak x dari tumpuan *roller*. Jika persamaan MBH diterapkan dalam Pers.(1) di atas maka akan diperoleh:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2}$$

atau

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{(-Py_i - Vx)}{EI_i} \Delta x^2 \quad (13)$$

Jika diasumsikan $\omega = \frac{P\Delta x^2}{E}$ dan $a = -\frac{V\Delta x^3}{E}$, kemudian kolom kembali dimisalkan dibagi dalam 3 segmen (lihat Gambar.1), maka Pers.(13) dapat diubah sebagai berikut:

$$y_0 - 2y_1 + y_2 + \frac{\omega}{I_1} y_1 = \frac{a}{I_1} \quad (14)$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 + \frac{\omega}{I_2} y_2 = \frac{2a}{I_2} \quad (15)$$

$$y_2 - 2y_3 + y_4 + \frac{\omega}{I_3}y_3 = \frac{3a}{I_3} \quad (16)$$

Kemudian dengan memasukan kondisi syarat batas diperoleh $y(x=0) = 0$ serta $y(x=L) = y_3 = 0$ dan $y'(x=L) = 0 \rightarrow y_4 = y_2$. Jika harga ini dimasukan ke dalam Pers.(16) akan diperoleh harga $2y_2 = \frac{3a}{I_3}$, atau $a = \frac{2}{3}I_3y_2$. Selanjutnya Pers.(14) dan (15) dapat dituliskan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

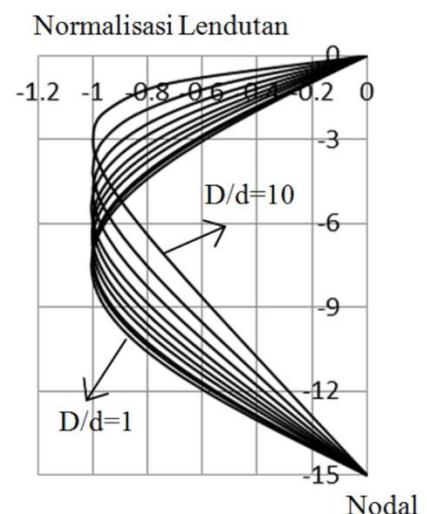
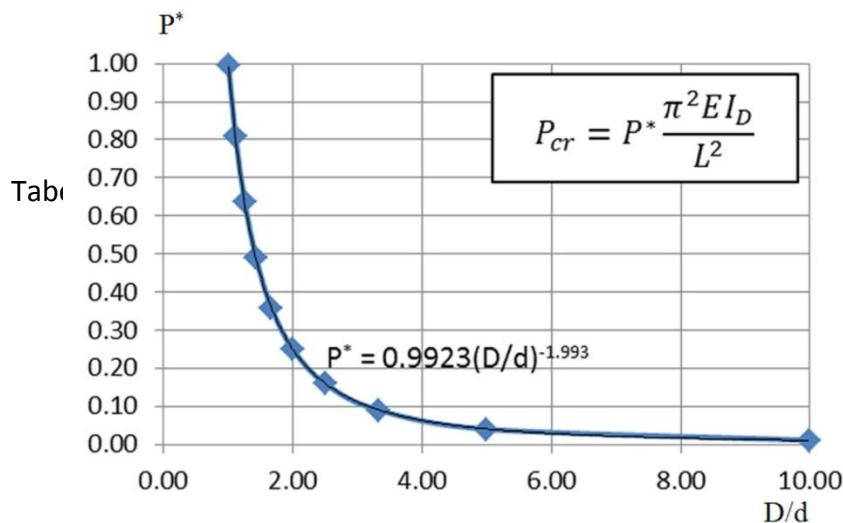
$$\begin{bmatrix} -2 & \left(1 - \frac{2I_3}{3I_1}\right) \\ 1 & -\left(2 + \frac{4I_3}{3I_2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega/I_1 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Dari Pers.(17) ini dapat dihitung harga beban kritis *buckling* $P = \frac{\omega E}{\Delta x^2}$ dan modus *buckling* kolom tersebut dapat dilihat dari *eigen vektor*nya.

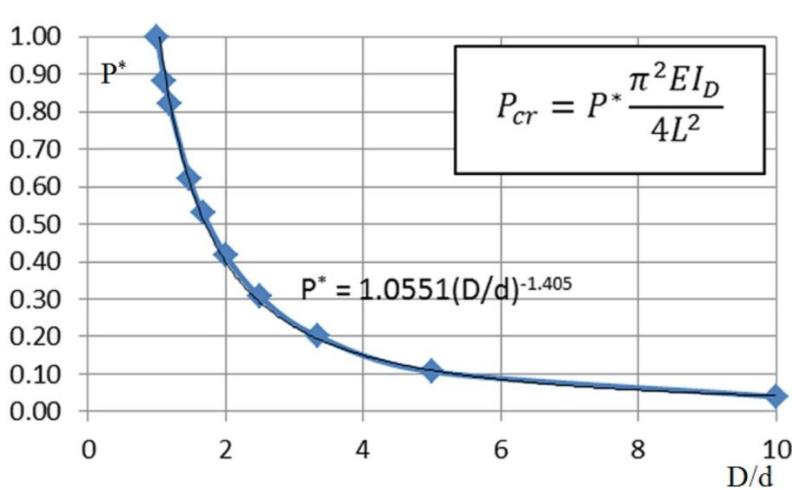
Model Numerik

Untuk penghitungan beban kritis *buckling* kolom taper, digunakan geometri seperti terlihat pada Tabel 1.

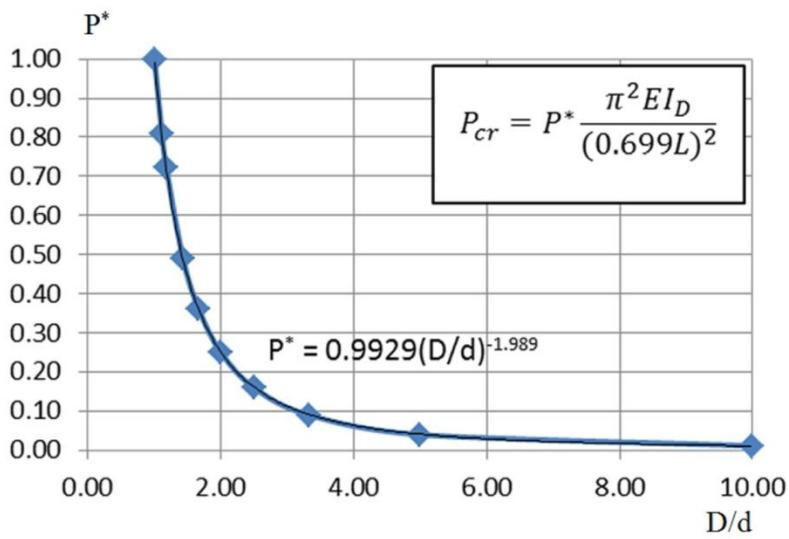
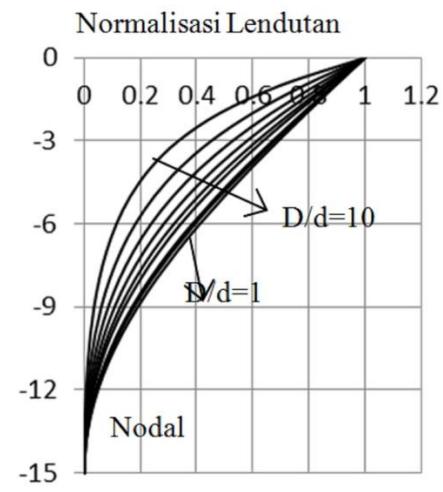
Parameter	Deskripsi	
Penampang Kolom	Bentuk Penampang: Bujur Sangkar Dimensi: Penampang Bawah: D=100 mm Penampang Atas: $d=10,20,30,40,50,60,70,80,90,100$ mm	
Kondisi Tumpuan	Tipe A	Atas:Roller-Bawah:Pin
	Tipe B	Atas:Bebas-Bawah:Jepit
	Tipe C	Atas:Roller-Bawah:Jepit
Beban	Vertikal tekan pada tumpuan atas, sebesar P	
Material	Baja, $\sigma_y = 270 \text{ N/mm}^2$ $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ dan $\vartheta = 0.3$	
Panjang Kolom	L=1000 mm	
Jumlah Segmen	15 buah (untuk ketiga jenis model tumpuan)	



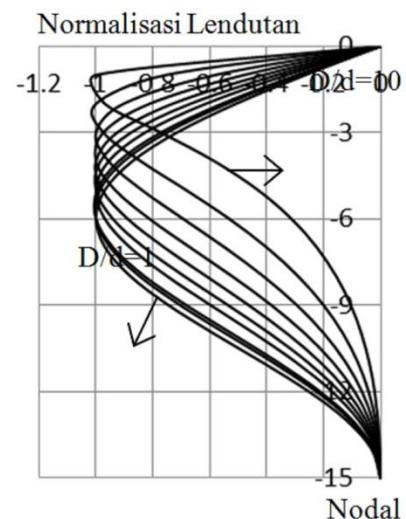
(a)



(b)



(c)



Gambar 2. Kurva faktor reduksi beban kritis *buckling* Euler vs rasio D/d beserta bentuk lendutannya: (a). Kolom taper dengan tumpuan *pin-roller* (atas), (b). Kolom taper dengan tumpuan *jejit-bebas* (tengah), dan (c). Kolom taper dengan tumpuan *jejit-roller* (bawah)

Tabel 2. Perbandingan hasil beban kritis *buckling* antara hasil MBH dengan hasil analitik Gere dan Carter, $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_d}{L^2} \left(\frac{D}{d}\right)^2$, untuk kolom taper dengan tumpuan *pin-roller*.

No	L (mm)	D (mm)	d (mm)	D/d	E (N/mm ²)	I _d (mm ⁴)	P _{MBH} /P _{euler} (MBH)	P _{Gr&Cr} /P _{euler} (Gere & Carter)
1	1000	100	100	1.00	210000	8333333	0.997	1.000

2	1000	100	90	1.11	210000	5467500	0.807	0.810
3	1000	100	85	1.18	210000	4350052	0.638	0.640
4	1000	100	70	1.43	210000	2000833	0.488	0.490
5	1000	100	60	1.67	210000	1080000	0.359	0.360
6	1000	100	50	2.00	210000	520833.3	0.249	0.250
7	1000	100	40	2.50	210000	213333.3	0.159	0.160
8	1000	100	30	3.33	210000	67500	0.089	0.090
9	1000	100	20	5.00	210000	13333.33	0.040	0.040
10	1000	100	10	10.00	210000	833.3333	0.010	0.010

Tabel 3. Perbandingan hasil beban kritis *buckling* antara hasil MBH dengan hasil analitik Gere dan Carter, $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_d}{(0.699L)^2} \left(\frac{D}{d}\right)^2$, untuk kolom taper dengan tumpuan jepit-*roller*.

No	L (mm)	D (mm)	d (mm)	D/d	E (N/mm ²)	I _d (mm ⁴)	P _{MBH} /P _{euler} (MBH)	P _{Gr&Cr} /P _{euler} (Gere & Carter)
1	1000	100	100	1.00	210000	8333333	1.000	1.000
2	1000	100	90	1.11	210000	5467500	0.810	0.810
3	1000	100	85	1.18	210000	4350052	0.723	0.723
4	1000	100	70	1.43	210000	2000833	0.490	0.490
5	1000	100	60	1.67	210000	1080000	0.360	0.360
6	1000	100	50	2.00	210000	520833.3	0.249	0.250
7	1000	100	40	2.50	210000	213333.3	0.159	0.160
8	1000	100	30	3.33	210000	67500	0.089	0.090
9	1000	100	20	5.00	210000	13333.33	0.039	0.040
10	1000	100	10	10.00	210000	833.3333	0.010	0.010

Hasil dan Pembahasan

Analisa penghitungan numerik berbasiskan metode beda hingga dilakukan dengan menggunakan program komputasi yang dibuat dengan *Software MatLab*.

A. Beban Kritis dan Bentuk Lendutan

Gambar 2 memperlihatkan harga faktor reduksi $P^* = P_{MBH}/P_{euler}$ untuk ke tiga jenis

tumpuan: pin-roller; jepit-bebas dan jepit-roller, dalam variasi rasio D/d. Harga P_{euler} menunjukkan harga beban kritis *buckling* yang diperoleh melalui persamaan Euler untuk kolom berpenampang seragam, sedangkan P_{MBH} adalah harga beban kritis *buckling* yang diperoleh melalui MBH.

Untuk kolom berpenampang seragam (ditandai dengan notasi D/d=1), hasil yang

diberikan dapat dijustifikasi kebenarannya dengan persamaan Euler. Untuk ketiga tumpuan hasil perbandingan memberikan harga $P_{MBH}/P_{euler}=1$.

Untuk melihat keefektifan MBH dalam menghitung beban kritis *buckling* kolom taper ini, hasil yang diperoleh diperbandingkan dengan hasil analitik yang diberikan oleh Gere dan Carter [5]. Hanya saja persamaan analitik ini diberikan untuk kolom dengan tumpuan *pin-roller* serta *jepit-roller*. Tidak ada persamaan yang diberikan untuk kasus tumpuan *jepit-bebas*. Tabel 2 dan Tabel 3 memperlihatkan hasil perbandingan MBH dengan Gere dan Carter menunjukkan tingkat akurasi yang sangat baik (berkisar 98%-100%) untuk seluruh rasio D/d.

Kemudian dari bentuk lendutan kolom taper dapat dilihat bahwa untuk kolom dengan tumpuan *pin-roller* maupun *jepit roller*, lendutan maksimum akan bergerak menuju ke arah penampang minimum jika rasio D/d ditingkatkan dari $D/d=1.0$ sampai $D/d=10$. Sedangkan untuk kolom dengan tumpuan *jepit-bebas*, bagian kolom yang berada dekat penampang minimum akan memiliki lendutan lebih besar jika rasio D/d ditingkatkan.

B. Rekomendasi Persamaan Desain

Sebagaimana yang diperlihatkan oleh Gambar.2, beban kritis *buckling* kolom taper akan tereduksi dengan semakin meningkatnya rasio D/d. Sebagai contoh harga P^* akan turun menjadi $P^*=0.24$ untuk kolom dengan tumpuan *pin-roller*, $P^*=0.42$ untuk kolom dengan tumpuan *jepit-bebas* dan $P^*=0.25$ untuk kolom dengan tumpuan *jepit-roller* jika rasio meningkat menjadi $D/d=2$. Kemudian jika D/d dinaikan menjadi 4, maka harga P^* kembali turun 0.07 untuk kolom dengan tumpuan *pin-roller*, $P^*=0.15$ untuk kolom dengan tumpuan *jepit-bebas* dan $P^*=0.075$ untuk kolom dengan tumpuan *jepit-roller*.

Untuk mendapatkan harga yang lebih umum, suatu persamaan desain untuk menentukan beban kritis *buckling* suatu kolom taper dengan panjang, L dapat ditentukan dengan memanfaatkan teknik regresi. Hasil yang diperoleh diperlihatkan pada Gambar.2, dimana untuk kolom taper

dengan tumpuan *pin-roller*, persamaan desain yang direkomendasikan adalah:

$$P_{cr} = P^* \cdot P_{euler}$$

$$P_{cr} = 0.9923(D/d)^{-1.993} \left(\frac{\pi^2 EI_D}{L^2} \right) \quad (18)$$

Kemudian, untuk kolom kolom taper dengan tumpuan *jepit-bebas*, persamaan desain yang direkomendasikan adalah:

$$P_{cr} = P^* \cdot P_{euler}$$

$$P_{cr} = 1.0551(D/d)^{-1.405} \left(\frac{\pi^2 EI_D}{4L^2} \right) \quad (19)$$

Terakhir, untuk kolom kolom taper dengan tumpuan *jepit-roller*, persamaan desain yang direkomendasikan adalah:

$$P_{cr} = P^* \cdot P_{euler}$$

$$P_{cr} = 0.9929(D/d)^{-1.989} \frac{\pi^2 EI_D}{(0.699L)^2} \quad (20)$$

Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari makalah ini adalah:

1. Penggunaan MBH cukup efektif dan akurat dalam menentukan beban kritis *buckling* untuk kolom kolom taper. Hasil perbandingan dengan persamaan analitik yang diberikan oleh Gere dan Carter menunjukkan tingkat akurasi hasil yang sangat baik sekitar 98%-100% untuk ketiga jenis tumpuan yang digunakan dan jumlah segmen kolom sebanyak 15 buah.
2. Tiga buah persamaan rekomendasi diberikan dalam makalah ini, yaitu sebagai berikut:

(i). kolom taper dengan tumpuan *pin-roller*

$$P_{cr} = 0.9923(D/d)^{-1.993} \left(\frac{\pi^2 EI_D}{L^2} \right)$$

(ii). kolom taper dengan tumpuan *jepit-bebas*

$$P_{cr} = 1.0551(D/d)^{-1.405} \left(\frac{\pi^2 EI_D}{4L^2} \right)$$

(iii). kolom taper dengan tumpuan jepit-
roller

$$P_{cr} = 0.9929(D/d)^{-1.989} \frac{\pi^2 EI_D}{(0.699L)^2}$$

Referensi

- [1] Gere J.M, Mechanics of Materials Sixth Edition, Thomson Learning, Singapore, 2004
- [2] W.F. Chen, E.M.Lui, Structural Stability: Theory and Implementation, Elsevier Science Pub.,1987
- [3] Satria, E; Arif, M.; Bur, M, "Penghitungan Analitik Kekuatan Buckling Struktur Kolom Bertingkat Dua Segmen dengan Beban Aksial yang Berbeda Pada Setiap Segmennya", Jurnal Teknika Vol.20 No.01, April, 2013.
- [4] M.J. Irremonger, "Finite Difference Buckling Analysis of Non-Uniform Columns", Computer and Structures, Vol.12 pp.741-748, 1980.
- [5]. Riley Charles.E,"Elastik Buckling Load Of Slender Columns With Variable Cross Section by The Newmark Method", Thesis Fort Collins, Colorado, 2003.