

Kesalahan Puncak Spektrum akibat Penggunaan Fungsi *Window* untuk Kasus Sinyal Sinusoidal Kontinu

Budi Heryadi, Zainal Abidin, dan Ignatius Pulung Nurprasetio

Fakultas Teknik Mesin dan Dirgantara ITB
Jalan Ganesha 10, Bandung, 40132, Indonesia

Email: budiheryadi001@gmail.com, zapauitb@gmail.com, ipn@ftmd.itb.ac.id

Abstrak

Fungsi *window* banyak digunakan dalam analisis getaran untuk mereduksi kesalahan puncak spektrum. Makalah ini membahas tentang analisis kesalahan puncak spektrum yang terjadi akibat penggunaan beberapa jenis fungsi *window*. Dalam analisis ini diturunkan sebuah persamaan matematik yang mampu menggambarkan perilaku kesalahan puncak spektrum dari sebuah sinyal sinusoidal kontinu akibat penggunaan fungsi *window*. Persamaan yang diperoleh selanjutnya divalidasi secara numerik untuk memeriksa keabsahan proses penurunan matematik yang dilakukan. Berdasarkan persamaan yang telah divalidasi, dapat diungkapkan bahwa kesalahan puncak spektrum masih terjadi meskipun fungsi *window* telah digunakan. Besar dari kesalahan ini tergantung dari jenis fungsi *window* yang digunakan, lama waktu rekam, dan sudut fasa sinyal.

Kata kunci: Fungsi *window*, kesalahan puncak spektrum, jenis fungsi *window*, lama waktu rekam, sudut fasa sinyal.

Latar Belakang

Perawatan prediktif mesin berbasis getaran saat ini banyak digunakan di industri [1]. Metode ini sangat mengandalkan analisis sinyal getaran dalam domain frekuensi [2]. Untuk menghasilkan sinyal domain frekuensi, yang disebut spektrum, sinyal domain waktu perlu diproses dengan menerapkan deret atau transformasi Fourier [3]. Bila deret atau transformasi Fourier langsung diterapkan terhadap sinyal domain waktu, maka akan terjadi kebocoran spektrum akibat waktu rekam bukan merupakan kelipatan dari periode sinyal. Jadi, untuk menghindari terjadinya kebocoran spektrum, sinyal domain waktu mulamula perlu dikalikan dengan fungsi *window* sebelum deret atau transformasi Fourier diterapkan. Namun, teknik semacam ini telah terbukti tidak mampu mencegah terjadinya kebocoran spektrum seutuhnya [4]. Bertolak dari permasalahan tersebut, dalam makalah ini dipaparkan mengenai analisis kesalahan puncak spektrum akibat penggunaan fungsi *window* untuk kasus sinyal sinus kontinu.

Sebenarnya, hampir semua penganalisis spektrum yang saat ini tersedia bekerja secara diskrit, sehingga analisis kesalahan juga harus dilakukan untuk sinyal diskrit. Namun, analisis sinyal diskrit akan melibatkan banyak variabel sehingga kesimpulan yang didapat lebih rumit dan

hasilnya sulit digunakan untuk merancang pengukuran. Untuk menghindari kerumitan yang muncul, dalam makalah ini akan dipaparkan analisis terhadap sinyal kontinu yang merupakan sebuah langkah awal untuk memahami kesalahan puncak spektrum sinyal diskrit. Dengan adanya langkah awal ini, analisis dan kesimpulan yang dipaparkan akan lebih mudah dipahami karena tidak melibatkan terlalu banyak variabel.

Analisis kesalahan spektrum yang dibahas dalam makalah ini hanya dilakukan terhadap sinyal sinusoidal murni, padahal sinyal yang diukur dalam praktik biasanya berupa sinyal yang rumit. Walau demikian, berdasarkan transformasi Fourier, sinyal periodik yang sebarang selalu dapat diuraikan menjadi kombinasi dari beberapa sinyal sinusoidal [3]. Oleh karena itu, analisis kesalahan puncak spektrum dari suatu sinyal sebarang dapat dilakukan dengan menerapkan superposisi dari kesalahan puncak spektrum sinyal sinusoidal yang telah diutarakan dalam kajian ini.

Metodologi Analisis Kesalahan Puncak Spektrum

Analisis perilaku kesalahan puncak spektrum dilakukan dengan menurunkan persamaan analitik puncak spektrum dari sebuah sinyal sinus kontinu yang sebelumnya telah dikalikan dengan fungsi *window*. Persamaan ini

kemudian divalidasi secara numerik untuk memeriksa keabsahannya. Setelah divalidasi, persamaan ini digunakan untuk menganalisis perilaku kesalahan puncak spektrum akibat penggunaan beberapa jenis fungsi *window*, yang meliputi fungsi *window* kotak, *Hanning*, *Flattop*, *Kaiser-Bessel*, *Blackman*, *Blackman-Harris*, *Hamming*, dan *Nuttal*.

Sinyal Sinusoidal dan Fungsi *Window* Kontinu

Misalkan bahwa sinyal sinusoidal yang puncak spektrumnya akan dianalisis adalah

$$y(t) = \sin(\omega t + \phi) = \sin\left(\frac{\omega}{T}t + \phi\right) \quad (1)$$

di mana

$y(t)$ = sinyal sinusoidal,

ω = waktu,

ω = amplitudo sinyal,

ω = frekuensi sinyal dalam satuan rad/s,

T = periode sinyal, dan

ϕ = sudut fasa.

Sementara itu, fungsi *window* yang akan dikalikan dengan sinyal $y(t)$ sebelum spektrum frekuensi dicari, dinyatakan dalam sebuah persamaan umum sebagai berikut

$$w(t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T}{\omega} \rfloor} \cos\left(\frac{j\pi}{\omega}\right) & \leq t \leq T \\ 0 & t < 0 \text{ atau } t > T \end{cases} \quad (2)$$

di mana $w(t)$ adalah fungsi *window*, T adalah panjang waktu rekam, sedangkan j adalah koefisien-koefisien untuk fungsi *window* yang memiliki luas sebesar satu satuan. Nilai-nilai j untuk kedelapan jenis fungsi *window* yang akan dianalisis diperlihatkan dalam Tabel 1.

Spektrum Frekuensi

Agar spektrum frekuensi dari sinyal $y(t)$ tidak mengalami kebocoran spektrum yang terlalu besar, fungsi $y(t)$ terlebih dahulu perlu dikalikan dengan fungsi *window* $w(t)$. Namun, hasil perkalian yang diperoleh, yaitu fungsi $x(t) = y(t)w(t)$, tidak lagi bersifat periodik seperti sinyal sinusoidal $y(t)$ karena fungsi *window* $w(t)$ tidak periodik. Oleh karena itu, agar bersifat periodik, sinyal $x(t)$ hanya didefinisikan di daerah $0 \leq t \leq T$, selanjutnya sinyal $x(t)$ untuk daerah $t < 0$ didefinisikan menurut aturan $x(t-T) = x(t)$ sedangkan untuk daerah $t > T$ didefinisikan menurut aturan $x(t+T) = x(t)$.

Setelah diperoleh sinyal $x(t)$ yang periodik, spektrum frekuensi dicari dengan cara menghitung koefisien Deret Fourier a_n dari sinyal $x(t)$, kemudian menggambarkan grafik harga norm dari koefisien a_n terhadap n ($0 \leq n \leq T$), di mana n adalah bilangan bulat [3]. Koefisien Deret Fourier dari sinyal $x(t)$ dicari dengan menggunakan integral berikut

Tabel 1 Koefisien-koefisien fungsi *window* [5,6,7,8]

| Jenis Fungsi <i>Window</i> | j | | | | |
|----------------------------|--------|---------|--------|---------|--------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Kotak | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| Hanning | 1,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| Flat Top | 1,0000 | -1,9326 | 1,2861 | -0,3877 | 0,0320 |
| Kaiser-Bessel | 1,0000 | -1,2388 | 1,2438 | -0,0025 | 0,0000 |
| Blackman | 1,0000 | -1,1905 | 0,1905 | 0,0000 | 0,0000 |
| Blackman-Harris | 1,0000 | -1,3611 | 0,3938 | -0,0326 | 0,0000 |
| Hamming | 1,0000 | -0,8519 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| Nuttal | 1,0000 | -1,3454 | 0,3757 | -0,0293 | 0,0000 |

$$a_n = \int_0^T \frac{x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}}{T} dt \quad (3)$$

$$= \int_0^T \frac{y(t) w(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}}{T} dt$$

di mana i adalah bilangan imajiner. Bila fungsi $y(t)$ dalam Persamaan (1) dan fungsi $w(t)$ dalam Persamaan (2) disubstitusikan ke dalam Persamaan (3) lalu integralnya diselesaikan, maka akan diperoleh koefisien Deret Fourier sebagai berikut

$$a_n = - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{T}{\omega} \rfloor} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [j \sin(\omega t + \phi) \{ -\sin(\omega t + \phi) + \dots \}] \dots \quad (4)$$

$$+ (+ (-)^k j) \ln(+) \dots \\ / (+ (-)^k j) - n]$$

di mana r adalah rasio waktu rekam terhadap periode sinyal. Dalam persamaan ini terdapat suku penyebut $(+ (-)^k j) - n$. Apabila kombinasi antara nilai variabel r , j , n , dan k menyebabkan suku penyebut ini bernilai nol, maka fungsi n dalam Persamaan (4) akan memiliki nilai tak hingga. Oleh karena itu, fungsi n di daerah ini didefinisikan sebagai harga limit n ketika $\rightarrow n - (-)^k j$.

Bila grafik harga norm koefisien Deret Fourier n terhadap n T digambarkan, maka akan diperoleh spektrum frekuensi yang bentuknya simetri terhadap garis $n = T/2$. Spektrum semacam ini dinamakan spektrum frekuensi penuh. Dalam praktik, spektrum frekuensi penuh jarang digunakan karena spektrum pada frekuensi positif sudah cukup mewakili spektrum pada frekuensi negatif, sehingga dikenal spektrum setengah frekuensi. Spektrum setengah frekuensi harus memiliki energi total yang sama dengan energi total spektrum frekuensi penuh. Oleh karena itu, spektrum setengah frekuensi memiliki tinggi spektrum sebesar dua kali harga norm dari koefisien Deret Fourier n , atau secara matematik dituliskan sebagai

$$n = \cdot \| n \| \\ = - \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{-i n_j \ln() \operatorname{co}(+)}{(+ (-)^k j) - n} \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{j(+ (-)^k j) \ln(+)}{(+ (-)^k j) - n} \right] \right\| -$$
(5)

di mana n menyatakan tinggi spektrum setengah frekuensi. Untuk mempersingkat penulisan, spektrum setengah frekuensi selanjutnya disebut sebagai spektrum frekuensi.

Puncak Spektrum Frekuensi

Puncak spektrum frekuensi adalah harga maksimum n yang diperoleh dengan cara mencari turunan parsial Persamaan (5) terhadap n lalu membuatnya bernilai nol dan mensubstitusi balik nilai n yang diperoleh ke dalam Persamaan (5). Bila nilai n yang menyebabkan turunan parsial Persamaan (5) bernilai nol dinotasikan dengan n_m sedangkan puncak spektrum dinotasikan dengan n_p , maka puncak spektrum dapat diungkapkan dalam persamaan berikut:

$$= - \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{-i n_m j \ln() \operatorname{co}(+)}{(+ (-)^k j) - n_m} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{j(+ (-)^k j) \ln(+)}{(+ (-)^k j) - n_m} \right] \right\|$$
(6)

Kesalahan Puncak Spektrum

Kesalahan puncak spektrum frekuensi didefinisikan sebagai E di mana

$$= \dots = \dots$$
(7)

Bila fungsi Y dalam Persamaan (6) disubstitusikan ke dalam Persamaan (7), maka akan diperoleh persamaan kesalahan puncak spektrum sebagai berikut:

$$= - \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{-i n_m j \ln() \operatorname{co}(+)}{(+ (-)^k j) - n_m} \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{j(+ (-)^k j) \ln(+)}{(+ (-)^k j) - n_m} \right] \right\| -$$
(8)

Berdasarkan Persamaan (8), dapat disimpulkan bahwa kesalahan puncak spektrum ditentukan oleh sudut fasa sinyal dan rasio waktu rekam terhadap periode sinyal r .

Untuk meyakinkan bahwa tidak ada kesalahan yang dilakukan selama proses penurunan persamaan berlangsung, Persamaan (8) perlu divalidasi secara numerik. Dalam validasi ini akan dibangkitkan sinyal sinusoidal kontinu dengan periode 1 s yang didekati dengan sinyal sinusoidal diskrit dengan panjang waktu rekam yang divariasikan mulai dari 0,01 s sampai dengan 10 s. Sinyal diskrit yang disimulasikan memiliki amplitudo satu satuan dan sudut fasa sebesar 0° . Sinyal ini kemudian ditransformasikan menjadi spektrum frekuensi dengan menggunakan perintah “FFT” pada program lunak MATLAB di spektrum yang diperoleh kemudian dihitung kesalahan puncaknya untuk dibandingkan dengan kesalahan puncak spektrum berdasarkan Persamaan (8).

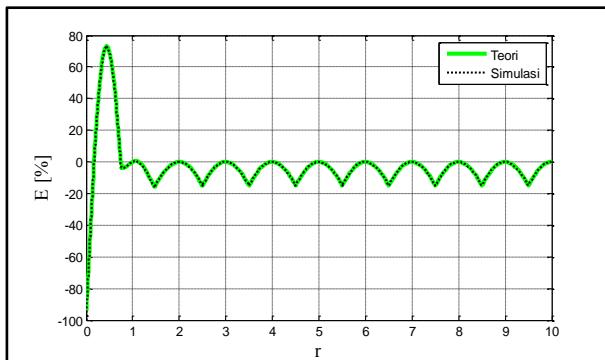
Dalam validasi Persamaan (8), ada dua kriteria yang harus dipenuhi agar kesalahan yang terjadi akibat proses numerik tidak terlalu besar. Pertama, sinyal diskrit yang disimulasikan harus memiliki sampel yang cukup banyak agar dapat menyerupai sinyal kontinu. Kedua, banyaknya sampel sinyal diskrit harus merupakan 2^p , di mana p adalah bilangan asli, agar proses “FFT” terhindar

dari *zero-padding*. Untuk memenuhi kedua kriteria ini, maka sinyal diskrit selalu dibuat dengan sampel sebanyak 16.384 (alias 2^{14}) buah untuk panjang waktu rekam berapapun. Dalam simulasi yang dilakukan, waktu rekam sinyal yang paling panjang adalah 10 kali periode sinyal, yaitu 10 s. Jadi, untuk kasus periode rekam terpanjang, satu periode sinyal diskrit akan mengandung 1.638 buah sampel, suatu jumlah yang dinilai cukup membuat sinyal sinus diskrit tampak seperti sinyal sinus kontinu.

Pada Gambar 1 diperlihatkan salah satu hasil simulasi numerik untuk memvalidasi Persamaan (8). Pada gambar ini ditampilkan dua buah grafik, yaitu grafik kesalahan puncak spektrum akibat penggunaan fungsi *window Hanning* terhadap sinyal simulasi dan grafik kesalahan puncak spektrum menurut Persamaan (8). Dalam gambar ini tampak bahwa selisih antara kedua grafik sangat kecil. Hal ini mengindikasikan bahwa persamaan kesalahan puncak spektrum, yaitu Persamaan (8) sudah valid.

Pembahasan Hasil

Kesalahan puncak spektrum akibat penggunaan salah satu fungsi *window*, yaitu *Hanning*, ditampilkan dalam bentuk grafik 3 dimensi sebagaimana tampak dalam Gambar 2. Dalam gambar ini diperlihatkan besar



Gambar 1 Validasi persamaan kesalahan puncak spectrum

kesalahan puncak spektrum sebagai fungsi dari sudut fasa sinyal dan rasio waktu rekam terhadap periode sinyal r . Dalam pengukuran getaran, rasio waktu rekam terhadap periode sinyal merupakan parameter pengukuran yang dapat diatur dengan cara memilih waktu rekam sinyal, sedangkan sudut fasa bukan merupakan parameter pengukuran, melainkan besaran getaran yang akan diukur. Oleh karena itu, dalam analisis ini akan dibuat asumsi bahwa spektrum frekuensi yang terjadi adalah spektrum dari sinyal yang sudut fasanya menyebabkan kesalahan puncak spektrum bernilai maksimum.

Kesalahan maksimum puncak spektrum terjadi ketika

$$\frac{(-)}{(-)} = \quad (9)$$

Bila fungsi E dalam Persamaan (8) disubstitusikan ke dalam Persamaan (9), maka akan diperoleh dua buah nilai sudut fasa kritis sebagai berikut:

$$= (-) - n \quad (10.a)$$

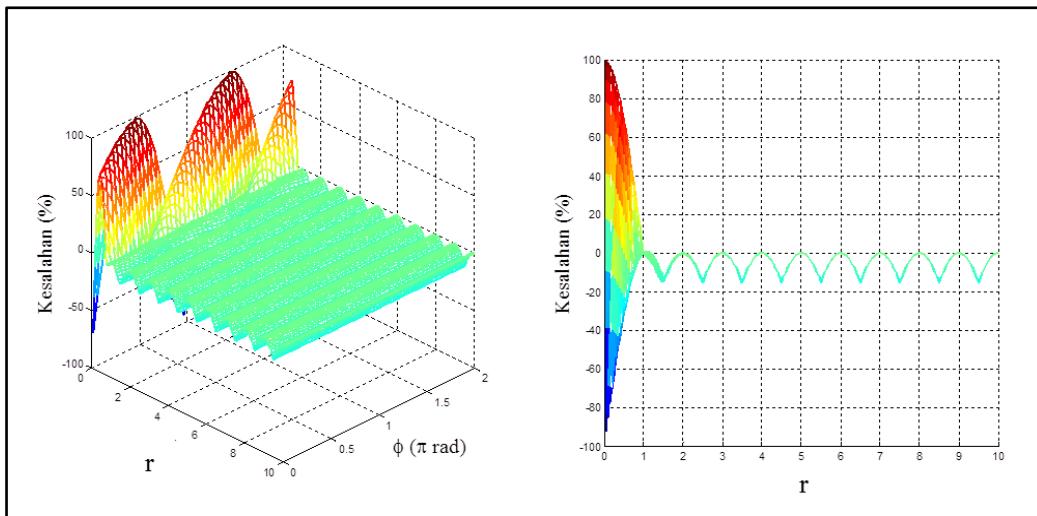
$$= (-) - n \quad (10.b)$$

Selanjutnya, masing-masing nilai sudut fasa kritis ini disubstitusi balik ke dalam Persamaan (8), sehingga diperoleh dua buah persamaan berikut:

$$= - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{j \sin(-) \{ + (-)^k j\}}{(-) + (-)^k j - n_m} \quad (11.a)$$

$$= - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{j n_m \sin(-)}{(-) + (-)^k j - n_m} \quad (11.b)$$

Persamaan (11.a) dan (11.b) dinamakan persamaan kritis kesalahan puncak spektrum

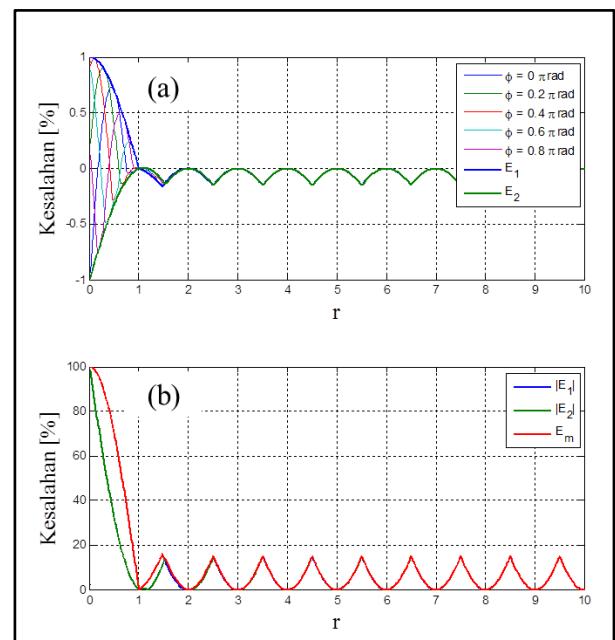


Gambar 2 Kesalahan puncak spektrum akibat penggunaan fungsi *window Hanning*

karena nilai E_1 dan E_2 merupakan nilai minimum maupun maksimum dari E sebagaimana ilustrasinya diwakilkan oleh grafik E_1 dan E_2 untuk fungsi *window Hanning* dalam Gambar 3(a). Padahal, kesalahan puncak spektrum yang dihindari dalam pengukuran getaran adalah kesalahan yang harga mutlaknya paling besar. Oleh karena itu, dalam Gambar 3(b) diperlihatkan grafik harga mutlak dari E_1 dan E_2 . Pada grafik ini tampak bahwa terdapat daerah di mana harga mutlak E_1 lebih besar daripada harga mutlak E_2 dan ada pula daerah di mana harga mutlak E_2 lebih besar daripada harga mutlak E_1 . Oleh karena itu, dalam Gambar 3(b) didefinisikan kesalahan absolut, yaitu E_m , berupa grafik berwarna merah yang merupakan nilai maksimum antara harga mutlak E_1 dan harga mutlak E_2 . Secara matematik, kesalahan absolut ini dinyatakan dalam persamaan

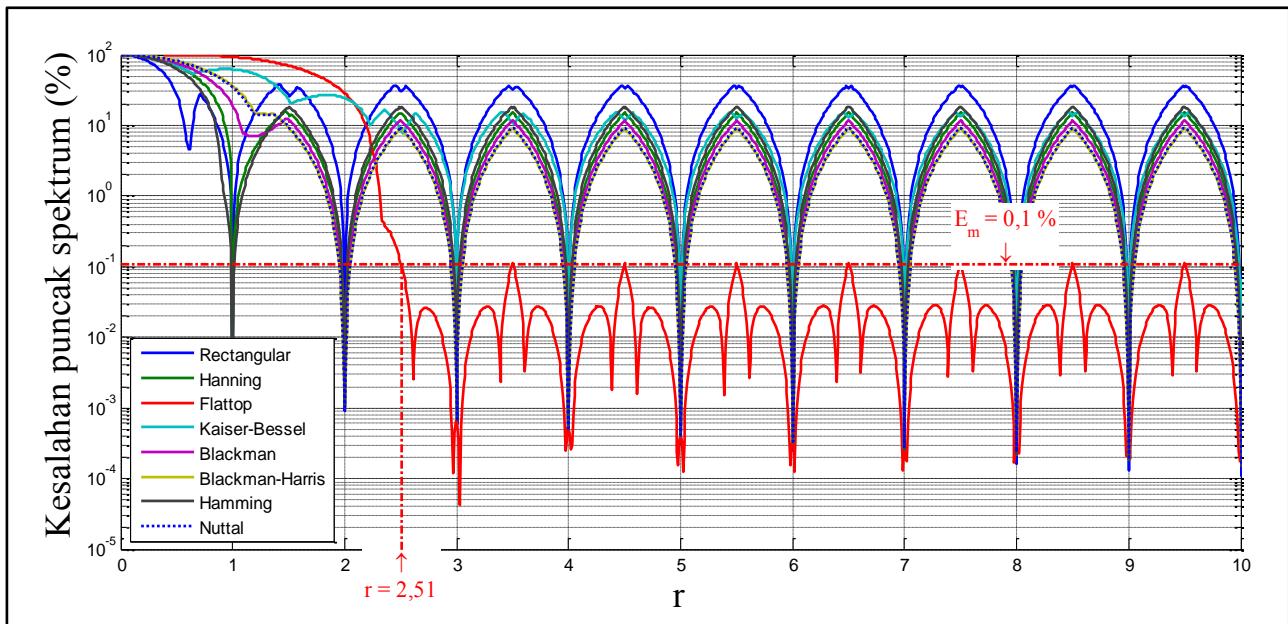
$$m(\cdot) = \begin{cases} |E_1(\cdot)| & \forall |E_1(\cdot)| \geq |E_2(\cdot)| \\ |E_2(\cdot)| & \forall |E_2(\cdot)| < |E_1(\cdot)| \end{cases} \quad (12)$$

Untuk membandingkan perilaku kesalahan puncak spektrum akibat penggunaan berbagai fungsi *window*, dalam Gambar 4 diperlihatkan kurva kesalahan absolut E_m untuk berbagai fungsi *window*. Dalam gambar ini terlihat bahwa tidak ada fungsi *window* yang mampu menghasilkan kesalahan absolut puncak spektrum kurang dari 0,1% kecuali fungsi *window Flattop*. Kesalahan sekecil ini pun hanya terjadi apabila waktu rekam sinyal lebih panjang daripada 2,51 kali dari periode sinyal.



Gambar 3 (a) *Envelope* dan (b) kesalahan absolut puncak spektrum

Waktu rekam yang sangat lama tidak menjamin akan memperbaiki ketelitian puncak spektrum karena kesalahan absolut puncak spektrum terus naik-turun bila waktu rekam terus dibuat semakin panjang. Bagaimanapun juga, waktu rekam harus diperpanjang manakala periode sinyal semakin besar (frekuensi sinyal semakin rendah) untuk mempertahankan lama waktu rekam minimal yang dibutuhkan. Jadi, lama waktu rekam harus selalu diatur dalam setiap pengukuran agar lebih besar daripada waktu rekam minimal ini. Hal ini menunjukkan bahwa pemilihan waktu rekam



Gambar 4 Kesalahan absolut puncak spektrum akibat penggunaan fungsi *window*

memiliki peran yang sangat penting dalam meminimalkan kesalahan puncak spektrum.

Kesimpulan

Dalam makalah ini telah dipaparkan perilaku kesalahan puncak spektrum akibat penggunaan fungsi *window*. Kesalahan puncak spektrum dijamin bernilai kurang dari 0,1% bila digunakan fungsi *window Flattop* dan dipilih waktu rekam lebih besar daripada 2,51 kali periode sinyal. Lebih dari nilai ini, penambahan waktu rekam tidak akan meningkatkan ketelitian puncak spektrum. Dengan kata lain, sepanjang apapun waktu rekam yang digunakan tidak akan meningkatkan ketelitian pengukuran puncak spektrum frekuensi. Di antara delapan buah fungsi *window* yang dikaji dalam makalah ini, fungsi *window Flattop* menghasilkan kesalahan puncak spektrum terkecil bila waktu rekam lebih besar daripada 2,51 kali periode sinyal.

Referensi

1. Lin i V “Theoretical Study About the Influence of Predictive Maintenance on Process Equipment Lifetime” Journal of Engineering Studies and Research – Volume 18, 2012.
2. Null H “Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior” In Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Vol. ASSP-29 (February 1981). pp. 84-91.
3. Oppenheim, A.V., and R.W. Schafer, “Discrete-Time Signal Processing”, Prentice-Hall, 1989, pp. 447-448.
4. Oppenheim, A.V., and R.W. Schafer. “Discrete-Time Signal Processing” Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999, pp. 468-471.
5. Gyzhko Mylovyh M Syk R “The Use of Spectral Windows in Analysis of Vibration Signals” Institute of Electrodynamics, Ukrainian National Academy of Science, 2013.
6. Sinha, N K “Linear Systems” John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1991.
7. Kuhn bin Z “Pilkulih Puncak Spektrum Akibat Penggunaan Fungsi Jendela Kotak, Hanning, dan Flattop pada Sinyal Sinus Waktu Konstan” Jurnal Teknik Mesin UK Petra, Vol. 12, No. 1, 2010.
8. Hui F J “On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform” Proceedings of the IEEE. Vol. 66 (January 1978). pp. 51-84.