

Analisa Numerik Kekuatan Buckling Struktur Kolom Bertingkat Dua Segmen dengan Beban Aksial Berbeda pada Setiap Segmen

Eka Satria, M. Arif Putra dan Mulyadi Bur

Jurusan Teknik Mesin Universitas Andalas
Kampus Limau Manis, Padang, 25133
e-mail: ekasatria@ft.unand.ac.id

Abstrak

Suatu struktur dengan rangka batang yang bervariasi secara geometri atau material sangat banyak digunakan dalam berbagai aplikasi teknik di lapangan. Salah satu kasus khusus yang melibatkan kondisi di atas adalah suatu kolom bertingkat dua segmen yang dibebani oleh beban aksial yang berbeda pada setiap segmennya. Kondisi ini secara praktek dapat ditemui pada kolom struktur bangunan bertingkat yang menahan beban-beban lantai di atasnya. Dikarenakan baik harga beban aksial maupun kekakuan yang berbeda disepanjang batang kolom, menjadikan kasus ini akan lebih sulit dibandingkan kasus kolom berpenampang seragam. Proses penghitungan beban *buckling* untuk kasus kolom bertingkat seperti tidak akan pernah bisa dilakukan dengan mudah karena akan dihadapkan pada persamaan matematika yang cukup rumit. Makalah ini mencoba memberikan suatu harga pendekatan bagi kekuatan *buckling* suatu struktur kolom bertingkat dua segmen melalui pendekatan numerik. Untuk itu sebuah program komputasi berbasiskan konsep metode elemen hingga yang memperhitungkan ketidaklinearan geometri dan material dikembangkan untuk bisa menghitung kekuatan *buckling* dari berbagai model struktur kolom bertingkat dua segmen. Untuk menguji keakuratan hasil program komputasi, kekuatan *buckling* elastik kolom yang diperoleh nantinya akan diverifikasi oleh suatu formula analitik yang diturunkan dengan konsep elastis mekanika benda padat. Hasil akhir yang berikan adalah diperolehnya suatu persamaan pendekatan untuk menghitung kekuatan kritis *buckling* kolom bertingkat dua segmen untuk berbagai variasi geometri dan pembebanan aksial. Diharapkan nantinya persamaan pendekatan ini dapat menjadi persamaan praktis yang bisa direkomendasikan dan digunakan langsung oleh praktisi dalam perancangan struktur kolom bertingkat dua segmen dengan beban aksial yang berbeda, untuk berbagai aplikasi di lapangan.

Keywords: kolom bertingkat, dua segmen, beban aksial yang berbeda, beban buckling, faktor reduksi.

Pendahuluan

Batang-batang dengan penampang yang bervariasi sangat banyak digunakan dalam praktek-praktek rekayasa struktur di lapangan karena penggunaan elemen seperti ini dalam suatu sistem struktur mekanik akan dapat mereduksi berat dari sistem secara keseluruhan sehingga akhirnya mampu menurunkan biaya konstruksi secara signifikan.

Sebuah batang yang tidak seragam secara geometri, variasi dari penampang dapat berupa perubahan secara kontinu disepanjang batang seperti yang ditunjukkan oleh batang-batang berbentuk taper, atau berupa perubahan yang terjadi secara langsung pada suatu titik pada batang seperti yang ditunjukkan oleh batang-batang dengan segmen bertingkat. Sebagai contoh, suatu desain rangka atap yang ekonomis dapat dicapai dengan menggunakan frame baja yang berbentuk taper (*steel tapered gabled frame*). Contoh lain adalah kolom struktur *crane* yang biasa digunakan dalam konstruksi bangunan tinggi

kebanyakan sekarang didesain dalam bentuk segmen bertingkat. Kemudian, sistem permesinan untuk mengangkat benda-benda yang sangat berat seringkali menggunakan *crane* yang bisa bergerak di sepanjang struktur *girder*. Struktur *girder* ini biasanya yang ditopang oleh kolom taper ataupun kolom dengan segmen bertingkat. Dari sisi pembebanannya, kolom tersebut disamping menerima beban aksial pada ujung paling atas dari berat sistem atap, juga akan menahan beban pada sisi bagian dalam dimana *crane* dipasang. Contoh lain yang paling banyak ditemukan di lapangan adalah kolom dengan segmen bertingkat yang digunakan pada struktur bangunan bertingkat, dimana kolom tersebut akan dibebani secara aksial oleh beban lantai bangunan bertingkat tersebut.

Untuk kolom dengan segmen bertingkat, baik beban aksial maupun kekakuan batang tidak akan konstan disepanjang batang kolom, oleh karena itu analisa kestabilan kolom dengan segmen bertingkat ini akan lebih rumit dibandingkan dengan kolom berbatang

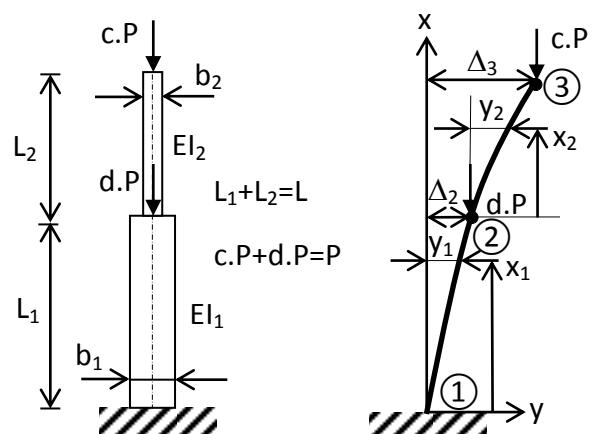
seragam. Untuk mendapatkan kekuatan *buckling*nya secara teoritik, analisa terpisah musti dilakukan untuk setiap segmen. Persamaan karakteristik untuk sepanjang kolom didapatkan dari hubungan kekontinuan antar segmen dan jenis kondisi dari ujung-ujung kolom itu sendiri. Kasus yang paling sederhana adalah kolom bertingkat dengan dua segmen dengan kondisi jepit pada ujung bawah dan bebas di ujung atasnya. Analisis elastik berdasarkan konsep mekanika untuk kasus ini hanya melibatkan dua buah fungsi lendutan; yaitu pada titik perubahan antar segmen dan ujung paling atas kolom. Kemudian solusi nontrivial diperoleh dari determinan kedua fungsi tersebut yang sebelumnya telah diubah menjadi matriks 2×2 . Hanya saja analisa analitik yang dilakukan dibatasi oleh kondisi ketebalan kolom yang seragam pada setiap segmen dan material yang diasumsikan elastik. Jika ketebalan kolom berbeda antar segmen serta pengaruh ketidaklinearan material juga diperhitungkan dalam analisa, proses penghitungan kekuatan *buckling* akan semakin rumit jika menggunakan pendekatan teoritik berbasiskan konsep mekanika benda padat. Untuk itu, makalah ini akan menggunakan program komputasi berbasiskan metode elemen hingga yang telah memperhitungkan pengaruh ketidaklinearan geometri dan material.

Untuk menguji keakuratan program yang dikembangkan, kekuatan *buckling* elastik kolom yang diperoleh nantinya akan diverifikasi oleh suatu formula analitik yang diturunkan dengan konsep elastis mekanika benda padat.

Walaupun hanya terbatas untuk jenis kolom bertingkat dua segmen, makalah ini memberikan suatu persamaan pendekatan untuk menghitung kekuatan kritis kolom bertingkat dua segmen dengan ketebalan segmen yang berbeda satu sama lainnya. Persamaan pendekatan ini diberikan untuk beberapa kasus tertentu yang diperoleh melalui analisa numerik. Diharapkan persamaan pendekatan ini, bisa direkomendasikan dan digunakan langsung oleh praktisi dalam perancangan struktur kolom bertingkat dua segmen dengan beban aksial yang berbeda untuk berbagai aplikasi di lapangan.

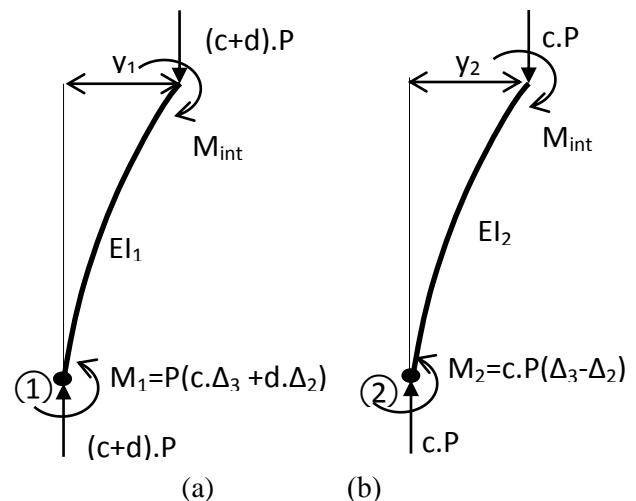
Persamaan Analitik untuk Kekuatan Buckling Kolom Bertingkat Dua Segmen

Sebuah model kolom bertingkat dua segmen dengan tumpuan jepit di ujung bawah serta bebas di ujung atas, diperlihatkan oleh Gbr. 1. Segmen 1 memiliki lebar penampang b_1 , momen inersia I_1 dan panjang segmen L_1 . Segmen 2 memiliki lebar penampang b_2 , momen inersia I_2 dan panjang segmen L_2 . Dua buah beban aksial bekerja pada kolom, dimana beban $c.P$ bekerja pada ujung atas segmen 2 dan beban $d.P$ bekerja pada titik perubahan segmen. Beban total yang bekerja diasumsikan sebesar $(c+d).P$.



Gambar.1 Kolom Bertingkat Dua Segmen

Diagram benda bebas (DBB) dari untuk tiap segmen diberikan oleh Gbr.2 berikut ini.



Gambar 2. DBB tiap segmen kolom bertingkat
(a). Segmen 1 (b). Segmen 2

Dari Gambar 2a dan 2b diperoleh persamaan differensial lendutan sebagai berikut:

$$y_1'' + k_1^2 y_1 = M_1/EI_1 \quad \dots (1)$$

$$y_2'' + k_2^2 y_2 = M_2/EI_2 \quad \dots (2)$$

dimana

$$k_1^2 = (c+d).P/EI_1 \quad \dots (3)$$

$$k_2^2 = c.P/EI_2 \quad \dots (4)$$

Solusi umum untuk harga y_1 dan y_2 diberikan oleh:

$$y_1 = A \sin(k_1 x_1) + B \cos(k_1 x_1) + M_1/EI_1 k_1^2 \quad \dots (5)$$

$$y_2 = C \sin(k_2 x_2) + D \cos(k_2 x_2) + M_2/EI_2 k_2^2 \quad \dots (6)$$

Syarat batas pada titik ① dan titik ② diberikan oleh

$$\begin{aligned}y_1(x_1 = 0) &= 0; \\y_1'(x_1 = 0) &= 0;\end{aligned}$$

$$y_1(x_1 = L_1) = y_2(x_2 = 0) + \Delta_2;$$

$$y_1'(x_1 = L_1) = y_2'(x_2 = 0),$$

sehingga dari Pers.(5) dan (6) diperoleh harga $A = 0$;

$$B = -M_1/EI_1 k_1^2;$$

$$C = (M_1 \sin(k_1 L_1)) / (EI_1 k_1 k_2);$$

$$D = (M_1/EI_1 k_1^2) - (M_2/EI_2 k_2^2) - \Delta_2 - \frac{(M_1 \cos(k_1 L_1)) / (EI_1 k_1^2)}{}$$

dimana $M_1 = P(d \cdot \Delta_2 + c \cdot \Delta_3)$ dan $M_2 = c \cdot P(\Delta_3 - \Delta_2)$.

Persamaan defleksi pada titik ② memberikan:

$$y_1(x_1 = L_1) = \Delta_2; \quad \dots (7)$$

dan pada titik ③ memberikan:

$$y_2(x_2 = L_2) = \Delta_3 - \Delta_2 \quad \dots (8)$$

Jika Pers. (7) dan (8) ini diubah dalam bentuk matriks akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots (9)$$

Kemudian jika parameter-parameter umum yang terkait dengan geometri umum kolom seperti:

$$L_1 = b \cdot L; L_2 = (1-b) \cdot L$$

$$EI_1 = a \cdot EI_2$$

$$P = (EI_2/c) \cdot k_2^2$$

$$k_1 = k_2 \cdot \sqrt{(c+d)/ac}$$

diinputkan ke dalam Pers. (9), maka akan diperoleh:

$$h_{11} = -\frac{d \left(\cos \left(k_2 \sqrt{\frac{c+d}{ac}} \cdot bL \right) - 1 \right)}{c+d} - 1$$

$$h_{12} = -\frac{\left(\cos \left(k_2 \sqrt{\frac{c+d}{ac}} \cdot bL \right) - 1 \right) \cdot c}{c+d}$$

$$h_{21} = -\frac{\cos(k_2(1-b)L)d \cos \left(k_2 \sqrt{\frac{c+d}{ac}} bL \right)}{c+d} +$$

$$\frac{\cos(k_2(1-b)L)d}{c+d} +$$

$$\frac{d \sin \left(k_2 \sqrt{\frac{c+d}{ac}} bL \right) \sin(k_2(1-b)L)}{ca \sqrt{\frac{c+d}{ac}}}$$

$$h_{22} = -\frac{\sin \left(k_2 \sqrt{\frac{c+d}{ac}} bL \right) \sin(k_2(1-b)L)}{a \sqrt{\frac{c+d}{ac}}} +$$

$$\frac{\cos(k_2(1-b)L)c}{c+d} - \cos(k_2(1-b)L) -$$

$$\frac{\cos(k_2(1-b)L) \cos \left(k_2 \sqrt{\frac{c+d}{ac}} bL \right)}{c+d}$$

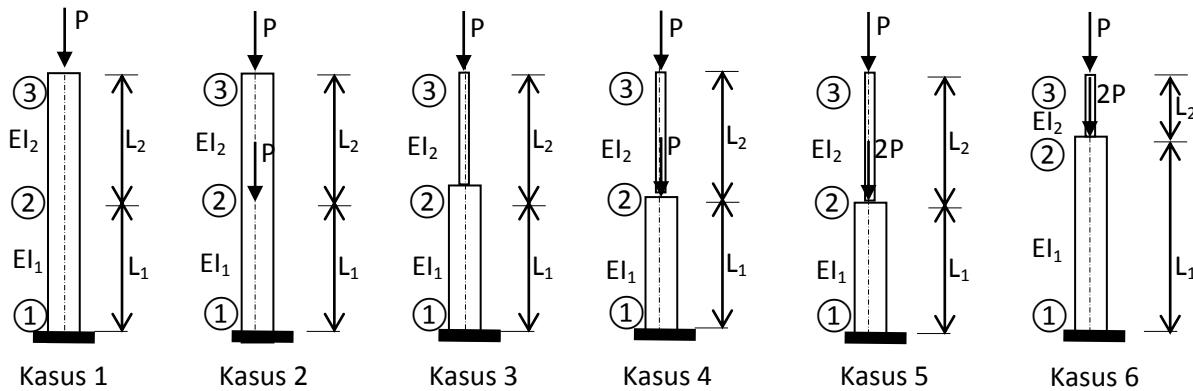
Solusi *nontrivial* dari Pers.(9) diperoleh dengan

$$\det \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$$

sehingga akan diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{\cos(k_2(-1+b)L) \cos \left(k_2 \sqrt{\frac{c+d}{ac}} bL \right) a \sqrt{\frac{c+d}{ac}}}{a \sqrt{\frac{c+d}{ac}}} + \\ \frac{\sin(k_2(-1+b)L) \sin \left(k_2 \sqrt{\frac{c+d}{ac}} bL \right)}{a \sqrt{\frac{c+d}{ac}}} = 0 \quad \dots (10)\end{aligned}$$

Dari Pers.(10) ini, kekuatan *buckling* dari beberapa model dasar (lihat Gbr 3) dari kolom bertingkat dua segmen yang dibebani dengan beban aksial pada setiap segmennya dapat diperoleh sebagai berikut:



Gambar 3. Kasus-kasus pembebanan pada kolom bertingkat

Untuk kasus 1 dan 2 diasumsikan momen inersia kedua segmen berharga sama, sedangkan untuk kasus 3 sampai 6 diasumsikan momen inersia segmen 1 delapan kali lebih besar dari segmen 2. Kemudian, dengan menggunakan Pers.(10), akan diperoleh harga beban kritis dari struktur kolom untuk masing-masing kasus sebagai berikut:

$$\text{Kasus 1: } P_{cr} = 2,467(EI_1/L^2) \quad \dots (11)$$

$$\text{Kasus 2: } P_{cr} = 2,067(EI_1/L^2) \quad \dots (12)$$

$$\text{Kasus 3: } P_{cr} = 0,959(EI_1/L^2) \quad \dots (13)$$

$$\text{Kasus 4: } P_{cr} = 0,938(EI_1/L^2) \quad \dots (14)$$

Untuk kasus 5 dan 6, gaya aksial yang bekerja di segmen 1 diasumsikan dua kali lebih besar dari segmen 2. Sedangkan, khusus untuk kasus 6 perbandingan L_1/L_2 diasumsikan sama dengan 2, sehingga beban kritis kolom menjadi:

$$\text{Kasus 5: } P_{cr} = 0,914(EI_1/L^2) \quad \dots (15)$$

$$\text{Kasus 6: } P_{cr} = 1,172(EI_1/L^2) \quad \dots (16)$$

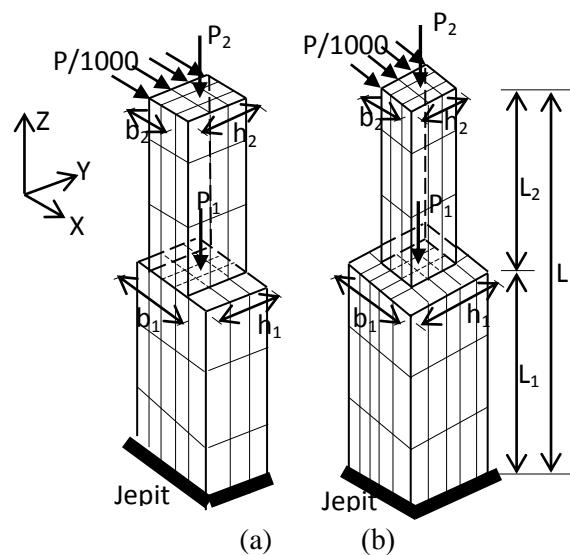
Analisa Numerik Penghitungan Kekuatan Buckling Kolom Bertingkat Dua Segmen

Proses penghitungan kekuatan kritis struktur kolom ini dihitung secara numerik dengan memanfaatkan program komputasi in-house [Kato, et.al (2005), Satria, et.al (2007, 2011, 2012)] berbasiskan metode elemen hingga yang memperhitungkan ketidaklinearan geometri dan material. Untuk pemodelan, struktur kolom dibuat dengan menggunakan elemen solid hexahedron 20 nodal. Ketidaklinearan geometri dihitung berdasarkan *Updated Langrangian Jaumann* dengan mempertimbangkan perpindahan dan rotasi yang besar. Ketidaklinearan material dihitung berdasarkan teori kriteria luluh *Von Misses*, *Associated Flow Rule*, dan *Hardening Rule* untuk material baja karbon rendah. Sedangkan solusi numerik untuk persamaan

kesetimbangan nonlinear diselesaikan dengan metoda pengontrolan perpindahan (*displacement control method*).

Model Kolom Bertingkat Dua Segmen

Ada dua jenis kolom bertingkat dua segmen yang digunakan. Model pertama, diberikan oleh Gbr.4a, memperlihatkan lebar penampang segmen 2 berkurang dari b_1 menjadi b_2 dimana $b_1=2b_2$, sedangkan ketebalannya tetap ($h_1=h_2$). Model ini ditampilkan dengan tujuan utama untuk melihat akurasi hasil dari program komputasi yang dikembangkan, melalui perbandingan hasil yang diberikan dengan hasil yang diperoleh melalui analisa analitik (Pers.(13) sampai Pers.(16)). Model kedua, diberikan oleh Gbr.4b, memperlihatkan pengurangan penampang kolom dilakukan pada kedua sisi penampang, baik lebar maupun ketebalan, atau $b_1=2b_2$ dan $h_1=2h_2$. Untuk model ini, hasil yang diberikan hanya dari analisa numerik saja, karena proses penurunan persamaan analitiknya yang cukup sulit.



Gambar 4. Kolom (a).Model Pertama, (b).Model Kedua

Tabel 2. Kolom dalam Variasi Geometri dan Jenis Kasus

KASUS	L (mm)	L ₁ (mm)	Segmen-1			Segmen-2			P _{KRITIS} NUMERIK (kN)	P _{KRITIS} ANALITIK (kN)	KASUS	Segmen-1			Segmen-2			P _{KRITIS} NUMERIK (kN)	P _{KRITIS} ANALITIK (kN)		
			b ₁ (mm)	h ₁ (mm)	P ₁ (N)	b ₂ (mm)	h ₂ (mm)	P ₂ (N)				b ₁ (mm)	h ₁ (mm)	P ₁ (N)	b ₂ (mm)	h ₂ (mm)	P ₂ (N)				
KOLOM PENAMPANG SERAGAM																					
KASUS-1	M01	1000	500	100	100	1000	100	100	0	Yield	4317,2	KASUS-2	M01	100	100	1000	100	100	1000	Yield	3617,2
	M02	2000	1000	100	100	1000	100	100	0	1019,1	1079,3		M02	100	100	1000	100	100	1000	891,4	904,4
	M03	3000	1500	100	100	1000	100	100	0	460,6	479,7		M03	100	100	1000	100	100	1000	400,47	401,9
	M04	4000	2000	100	100	1000	100	100	0	262,3	269,8		M04	100	100	1000	100	100	1000	226,4	226,1
	M05	5000	2500	100	100	1000	100	100	0	169,1	172,7		M05	100	100	1000	100	100	1000	142,6	144,7
KOLOM BERTINGKAT MODEL PERTAMA																					
KASUS-3	M01	1000	500	100	100	1000	50	100	0	Yield	1678,2	KASUS-3	M01	100	100	1000	50	50	0	Yield	
	M02	2000	1000	100	100	1000	50	100	0	417,3	419,6		M02	100	100	1000	50	50	0	248,1	
	M03	3000	1500	100	100	1000	50	100	0	178,4	186,5		M03	100	100	1000	50	50	0	112,7	
	M04	4000	2000	100	100	1000	50	100	0	105,2	104,9		M04	100	100	1000	50	50	0	64,7	
	M05	5000	2500	100	100	1000	50	100	0	61,02	67,1		M05	100	100	1000	50	50	0	42,2	
KASUS-4	M01	1000	500	100	100	1000	50	100	1000	Yield	1641,4	KASUS-4	M01	100	100	1000	50	50	1000	Yield	
	M02	2000	1000	100	100	1000	50	100	1000	405,8	410,4		M02	100	100	1000	50	50	1000	245,6	
	M03	3000	1500	100	100	1000	50	100	1000	173,4	182,4		M03	100	100	1000	50	50	1000	110,4	
	M04	4000	2000	100	100	1000	50	100	1000	100,7	102,6		M04	100	100	1000	50	50	1000	63,2	
	M05	5000	2500	100	100	1000	50	100	1000	57,7	65,7		M05	100	100	1000	50	50	1000	40,5	
KASUS-5	M01	1000	500	100	100	1000	50	100	2000	Yield	1599,5	KASUS-5	M01	100	100	1000	50	50	2000	Yield	
	M02	2000	1000	100	100	1000	50	100	2000	396,6	399,9		M02	100	100	1000	50	50	2000	213,7	
	M03	3000	1500	100	100	1000	50	100	2000	170,6	177,7		M03	100	100	1000	50	50	2000	109,3	
	M04	4000	2000	100	100	1000	50	100	2000	96,3	99,9		M04	100	100	1000	50	50	2000	62,0	
	M05	5000	2500	100	100	1000	50	100	2000	55,2	64,0		M05	100	100	1000	50	50	2000	39,3	
KASUS-6	M01	1000	667	100	100	1000	50	100	2000	Yield	2051,0	KASUS-6	M01	100	100	1000	50	50	2000	Yield	
	M02	2000	1333	100	100	1000	50	100	2000	516,3	512,7		M02	100	100	1000	50	50	2000	263,6	
	M03	3000	2000	100	100	1000	50	100	2000	216,1	227,9		M03	100	100	1000	50	50	2000	177,3	
	M04	4000	2666	100	100	1000	50	100	2000	125,1	128,2		M04	100	100	1000	50	50	2000	106,6	
	M05	5000	3333	100	100	1000	50	100	2000	80,1	82,1		M05	100	100	1000	50	50	2000	67,1	

Sifat Geometri dan Pembebaan

Analisa numerik akan dilakukan terhadap kedua model kolom di atas (lihat Gbr.4) untuk 6 kasus yang berbeda (lihat Gbr.3). Setiap kasus akan dibagi lagi dalam berbagai variasi panjang kolom. Geometri umum kolom untuk setiap kasus dijelaskan dalam Tabel 1.

Sifat Material

Seluruh model kolom yang dianalisa terbuat dari material yang sama seperti yang dijelaskan Tabel 2.

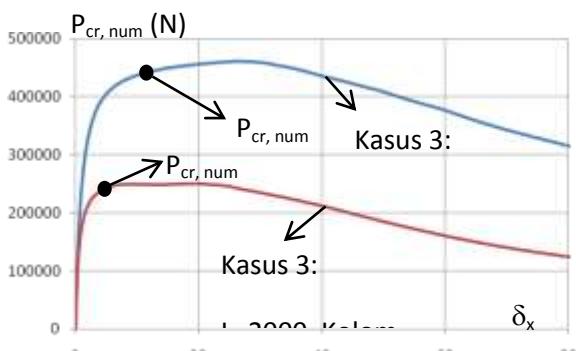
Tabel 2. Sifat Material

Modulus Elastisitas (E) – (N/mm 2)	210000
Rasio Poisson (ν)	0.3
Tegangan Luluh (σ_y) – (N/mm 2)	270
Model Tegangan-Regangan	Bi-Linear
Kriteria Luluh	Von-Misses
Flow Rule	Associated
Hardening Rule	Isotropic
Hardening Parameter	$E/100$

Hasil dan Pembahasan

Penentuan Kekuatan Kritis Buckling Kolom

Kekuatan kritis *buckling* kolom ditentukan dari grafik hubungan beban dan perpindahan (P vs δ_x) yang diperoleh lewat analisa numerik. Sebagai contoh Gbr.5 memperlihatkan 2 buah grafik P vs δ_x untuk kasus 3 pada kolom bertingkat model pertama dan kedua dengan geometri seperti yang diberikan oleh model M02 (lihat Tabel 1).



Gambar 5. Penentuan kekuatan Kritis Buckling Kolom secara Numerik

Dari Gbr.5, diketahui bahwa kekuatan kritis *buckling* untuk tipe Kolom Pertama adalah sekitar $P_{cr}=410$ kN dan untuk tipe Kolom Kedua sebesar $P_{cr}=245$ kN. Prosedur ini juga berlaku untuk semua model.

Kolom dengan Penampang Seragam

Kasus 1 pada Tabel 1 memperlihatkan harga kekuatan kritis kolom berpenampang seragam dengan beban aksial $P=1000$ N diberikan hanya pada ujung kolom bagian atas. Kekuatan kritis numerik yang diperoleh umumnya mendekati harga yang diberikan persamaan

analitik (Pers.11). Sebagai contoh, untuk kolom dengan geometri M02 dan M03, kekuatan kritis melalui pendekatan numerik adalah $P_{cr, numerik}=1019,1$ kN dan 460,6 kN. Harga ini mendekati harga yang diberikan Pers. (11), yaitu $P_{cr, analitik}=1079,3$ kN untuk kolom M02 dan 479,7 untuk M03. Terdapat kesalahan sekitar 5,5% dan 3,6% berturut-turut untuk kolom M02 dan M03. Kesalahan ini disebabkan oleh karena kegagalan *buckling* terjadi ketika struktur dalam kondisi elastik, sehingga akan timbul sedikit kesulitan dalam menentukan kapan struktur tersebut mulai mengalami kegagalan *buckling* untuk pertama kalinya (lihat Gbr.5). Khusus untuk tipe kolom M01, kegagalan yang terjadi adalah kegagalan karena proses peluluhan. Hal ini disebabkan karena kolom M01 memiliki rasio kelangsungan yang rendah.

Selanjutnya, kasus 2 pada Tabel 1 memperlihatkan harga kekuatan kritis kolom berpenampang seragam dengan beban aksial $P=1000$ N diberikan pada masing-masing segmen. Seperti halnya kasus 1, kekuatan kritis numerik yang diperoleh umumnya mendekati harga yang diberikan persamaan analitik yang diberikan oleh Pers.(12) dengan rasio kesalahan rata-rata dibawah 5%. Jika dibandingkan dengan Kasus 1, harga kekuatan *buckling* yang diperoleh sedikit lebih rendah.

Kolom Bertingkat Model Pertama

Tabel 1 juga memperlihatkan harga-harga kekuatan kritis *buckling* kolom bertingkat dua segmen untuk tipe model pertama, seperti yang diberikan oleh kasus-kasus tiga sampai enam.

Kasus 3 memperlihatkan kolom bertingkat dua segmen dengan beban aksial $P=1000$ N hanya pada ujung atasnya saja. Hasil yang diperoleh memperlihatkan bahwa harga kekuatan kritis yang diberikan melalui analisa numerik dapat mendekati harga kekuatan kritis yang diberikan oleh persamaan analitik pada Pers.(13). Kondisi yang sama juga terlihat untuk kasus 4, 5 dan 6, dimana hasil kekuatan kritis *buckling* yang diberikan oleh Pers.(14), Pers.(15) dan Pers.(16) dapat didekati oleh analisa numerik.

Hasil ini menunjukkan bahwa program komputasi berbasiskan metode elemen hingga yang dikembangkan untuk menghitung kekuatan kritis *buckling* kolom bertingkat dua segmen memberikan akurasi penghitungan yang cukup baik dengan rata-rata kesalahan kurang dari 5%.

Kolom Bertingkat Model Kedua

Tabel 1 memperlihatkan harga-harga kekuatan kritis *buckling* kolom bertingkat dua segmen untuk tipe

model kedua untuk empat buah kasus, yaitu kasus satu sampai kasus enam.

Kasus 3:

Kasus 3 memperlihatkan kolom bertingkat dengan beban aksial $P=1000$ N hanya pada ujung atasnya saja. Perubahan luas penampang digambarkan dengan pengurangan penampang segmen 1 dari sebesar 100×100 mm berkurang menjadi 50×50 mm pada segmen 2. Hasil yang diperoleh memperlihatkan bahwa harga kekuatan kritis *buckling* yang diberikan melalui analisa numerik adalah $P_{cr, numerik}=248,1$ kN untuk tipe M02, $112,7$ kN untuk tipe M03, $64,7$ kN untuk tipe M04 dan $42,2$ kN untuk tipe M05. Jika harga-harga ini diperbandingkan dengan harga kekuatan kritis numerik kolom bertingkat tipe model pertama, maka akan diperoleh rata-rata reduksi sebesar:

$$\alpha = \left(\frac{P_{cr, numerik, Model_Kedua}}{P_{cr, numerik, Model_Pertama}} \right)_{rata-rata} = 0,63 \quad \dots (17)$$

Sehingga solusi praktis untuk kasus tiga ini dapat diberikan dengan memodifikasi Pers.(13) menjadi Pers.(18) sebagai berikut:

$$P_{cr} = \alpha \cdot 0,959(EI_1/L^2) = 0,63 \cdot 0,959(EI_1/L^2) \quad \dots (18)$$

Kasus 4:

Kasus 4 memperlihatkan kolom bertingkat dengan beban aksial $P=1000$ N pada setiap segmennya. Perubahan luas penampang digambarkan dengan pengurangan penampang segmen 1 dari sebesar 100×100 mm berkurang menjadi 50×50 mm pada segmen 2. Hasil yang diperoleh memperlihatkan bahwa harga kekuatan kritis yang diberikan melalui analisa numerik adalah $P_{cr, numerik}=245,6$ kN untuk tipe M02, $110,4$ kN untuk tipe M03, $63,2$ kN untuk tipe M04 dan $40,5$ kN untuk tipe M05. Jika harga-harga ini diperbandingkan dengan harga kekuatan kritis numerik kolom bertingkat tipe model pertama, maka dengan Pers.(17) akan diperoleh rata-rata reduksi sebesar $\alpha = 0,64$. Sehingga solusi praktis untuk kasus lima ini dapat diberikan dengan memodifikasi Pers.(14) menjadi Pers.(19) sebagai berikut:

$$P_{cr} = \alpha \cdot 0,938(EI_1/L^2) = 0,64 \cdot 0,938(EI_1/L^2) \quad \dots (19)$$

Kasus 5:

Kasus 5 memperlihatkan kolom bertingkat dengan beban aksial $P_1=1000$ N pada ujung segmen 1 dan $P_2=2000$ N pada ujung segmen 2. Perubahan luas penampang digambarkan dengan pengurangan

penampang segmen 1 dari sebesar 100×100 mm berkurang menjadi 50×50 mm pada segmen 2. Hasil yang diperoleh memperlihatkan bahwa harga kekuatan kritis yang diberikan melalui analisa numerik adalah $P_{cr, numerik}=213,7$ kN untuk tipe M02, $109,3$ kN untuk tipe M03, $62,0$ kN untuk tipe M04 dan $39,3$ kN untuk tipe M05. Jika harga-harga ini diperbandingkan dengan harga kekuatan kritis numerik kolom bertingkat tipe model pertama, maka dengan Pers.(17) akan diperoleh rata-rata reduksinya sebesar $\alpha = 0,63$. Solusi praktis untuk kasus lima ini dapat diberikan dengan memodifikasi Pers.(15) menjadi Pers.(20) sebagai berikut:

$$P_{cr} = \alpha \cdot 0,914(EI_1/L^2) = 0,63 \cdot 0,914(EI_1/L^2) \quad \dots (20)$$

Kasus 6:

Kasus 6 memperlihatkan kolom bertingkat dengan beban aksial $P_1=1000$ N pada ujung segmen 1 dan $P_2=2000$ N pada ujung segmen 2. Perubahan luas penampang digambarkan dengan pengurangan penampang segmen 1 dari sebesar 100×100 mm berkurang menjadi 50×50 mm pada segmen 2. Perbedaan dengan kasus 4 adalah pada perbandingan harga L_1/L_2 yang naik dari 1,0 menjadi 2,0. Hasil yang diperoleh memperlihatkan bahwa harga kekuatan kritis yang diberikan melalui analisa numerik adalah $P_{cr, numerik}=263,6$ kN untuk tipe M02, $177,3$ kN untuk tipe M03, $106,6$ kN untuk tipe M04 dan $67,1$ kN untuk tipe M05. Jika harga-harga ini diperbandingkan dengan harga kekuatan kritis numerik kolom bertingkat tipe model pertama, maka dengan Pers.(17) akan diperoleh rata-rata reduksinya sebesar $\alpha = 0,76$. Sehingga solusi praktis untuk kasus enam ini dapat diberikan dengan memodifikasi Pers.(15) menjadi Pers.(21) sebagai berikut:

$$P_{cr} = \alpha \cdot 1,172(EI_1/L^2) = 0,76 \cdot 1,172(EI_1/L^2) \quad \dots (21)$$

Kesimpulan

Beberapa poin yang dapat disimpulkan dari makalah ini adalah:

- Persamaan analitik (Pers.10) yang diturunkan dengan konsep mekanika benda padat dapat digunakan untuk menghitung kekuatan kritis buckling struktur kolom bertingkat dua segmen untuk berbagai variasi geometri dan pembebangan. Hanya saja persamaan tersebut dibatasi untuk kondisi kolom dengan ketebalan seragam ($h_1=h_2$) dan material elastik.
- Program komputasi berbasiskan metode elemen

hingga nonlinear yang dikembangkan dapat menghitung kekuatan buckling kolom bertingkat dua segmen dengan baik. Hal ini dibuktikan dengan hasil penghitungan yang mendekati hasil penghitungan analitik, dengan tingkat kesalahan rata-rata dibawah 5% jika dibandingkan dengan persamaan analitik yang telah diturunkan sebelumnya.

- Dari hasil analisa numerik untuk kolom bertingkat dua segmen, dengan perubahan penampang terjadi pada kedua sisi, baik lebar (b) maupun tebal kolom (h), dapat diberikan harga pendekatan untuk menghitung kekuatan kritis kolom bertingkat dalam berbagai variasi kasus, sebagai berikut:

Kasus	Segmen-1	Segmen-2	Kekuatan Kritis
Kasus 3	$A=b \times h$ $L_1=L/2$ $P_1=0$ $E_1=E$	$A=b/2 \times h/2$ $L_2=L/2$ $P_2=P$ $E_2=E$	$P_{cr} = 0,604(EI_1/L^2)$
Kasus 4	$A=b \times h$ $L_1=L/2$ $P_1=P$ $E_1=E$	$A=b/2 \times h/2$ $L_2=L/2$ $P_2=P$ $E_2=E$	$P_{cr} = 0,591(EI_1/L^2)$
Kasus 5	$A=b \times h$ $L_1=L/2$ $P_1=P$ $E_1=E$	$A=b/2 \times h/2$ $L_2=L/2$ $P_2=2P$ $E_2=E$	$P_{cr} = 0,576(EI_1/L^2)$
Kasus 6	$A=b \times h$ $L_1=(2/3)L$ $P_1=P$ $E_1=E$	$A=b/2 \times h/2$ $L_2=(1/3)L$ $P_2=2P$ $E_2=E$	$P_{cr} = 0,891(EI_1/L^2)$

Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Direktorat Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI atas dana penelitian yang diberikan melalui Penelitian Fundamental 2013 melalui DIPA Universitas Andalas Nomor: 023.04.2.415061/2013, dimana makalah ini merupakan output dari salah satu bagian penelitian tersebut.

Nomenklatur

I	Momen Inersia (mm^4)
A	Luas Penampang (mm^2)
$b_1 \times h_1$	Panjang \times Lebar Penampang Segmen 1 (mm)
$b_2 \times h_2$	Panjang \times Lebar Penampang Segmen 1 (mm)
L	Panjang Kolom (mm)
L_1	Panjang Segmen 1 (mm)
L_2	Panjang Segmen 2 (mm)

P_1	Beban pada Segmen 1(N)
P_2	Beban pada Segmen 2 (N)
E	Elastisitas Material (N/mm^2)
P_{cr}	Beban Kritis Penghitungan Analitik (kN)
$P_{cr, num}$	Beban Kritis Penghitungan Numerik (kN)
(1)	Titik Pengamatan pada Tumpuan Jepit
(2)	Titik Pengamatan pada sambungan antar segmen
(3)	Titik Pengamatan pada Ujung Bebas
M_1	Momen pada titik pengamatan (1)
M_2	Momen pada titik pengamatan (3)
a	Rasio Perbandingan I_1/I_2
b	Rasio Perbandingan L_1/L
c	Faktor pengali gaya P_1
d	Faktor pengali gaya P_2
y_1	Lendutan searah sb-y pada kolom pada ketinggian x_1 dari titik (1)
y_2	Lendutan searah sb-y pada kolom pada ketinggian x_2 dari titik (2)
k_1, k_2	Konstanta (Pers.(3.4) dan (3.5))
A,B,C,	Konstanta Persamaan Lendutan
D	
M_{int}	Momen sebagai gaya dalam

Greek letters

ν	Rasio Poisson
α	Faktor Reduksi
σ_y	Tegangan Luluh (N/mm^2)
Δ_2	Lendutan pada titik pengamatan (2)
Δ_3	Lendutan pada titik pengamatan (3)

Referensi

- Chen, W.F; Lui, E.M (1987), Structural Stability, Theory and Implementation, Elsevier Science Pub, New York.
- Kato, S; Kim, Y.B (2005),"Simulation of the cyclic behavior of J-Shaped Steel Hysteresis Devices and Study on the Efficiency for Reducing Earthquake Responses of Space Structures, Journal Constructional Steel Structures, Vol 61, pp.1457-1473.
- Satria, E; Kato, S; Kim, Y.B (2007), "Comparison of Design Formula for Buckling Cylindrical Steel Shells under Axial Compression", Journal of Steel Construction Engineering, Vol.14(54), pp.27-41.
- Satria, E; Bur, M; Zachari, H (2011),"Penghitungan Kekuatan Elasto-Plastik Struktur Silinder Berdinding Tipis Akibat Beban Tekan Aksial dengan Melibatkan Pengaruh Ketidak sempurnaan Geometri", SNTTM X, Malang.
- Satria, E; Bur, M; Rizki, S, (2012),"Kaji Perbandingan Hasil Komputasi Kekuatan kritis Struktur Kolom Baja akibat Beban Tekan Aksial dengan Standar-Standar Perancangan", SNTTM XI, Yogyakarta.