

SIMULASI NUMERIK KONVEKSI ALAMI DALAM KOTAK 2-D DENGAN VARIASI PANAS DARI BAWAH MENGGUNAKAN SKEMA KOMPAK ORDE TINGGI

E.P. BUDIANA¹, P.J. WIDODO² and S.A. SAPUTRO³

^{1,2}Lecturer Department of Mechanical Engineering Sebelas Maret University

³Undergraduate Student Department of Mechanical Engineering Sebelas Maret University

Email: budiana.e@gmail.com

Abstract

This paper present numerical method for solving steady natural convection in two dimensional cavity using high-order compact scheme. The method is based on Runge-Kutta schemes for temporal discretization and fourth-order compact finite difference scheme for spatial discretization. Difficulty related to the pressure can be overcome by using artificial compressibility method. The simulation of localized heated from below and symmetrical cooling from the sides were carried out in order to validate this approach. The combination of Runge-Kutta and compact finite difference schemes is found to be an efficient and stable numerical approach for low and moderate Rayleigh number calculations. The results for this problem were compared well between LBM and finite different approaches. The paper demonstrates that the high-order compact scheme is a promising simulation tool for the simulation of natural convection heat transfer phenomena within a wide range of Rayleigh number values.

Keywords : natural convection, compact schemes, artificial compressibility, heated

1. PENDAHULUAN

Penelitian mengenai fenomena konveksi alami telah banyak dilakukan baik secara eksperimental maupun secara numerik. Metode numerik untuk mengetahui fenomena konveksi alami telah dilakukan, dengan menggunakan model matematika dari persamaan kontinyuitas, persamaan Navier-Stokes dan persamaan energi.

Penelitian konveksi alami secara numerik berkembang pesat sejalan dengan perkembangan komputer digital berkecepatan tinggi yang semakin pesat. Le Quere (1990), meneliti konveksi alami dalam kotak 2-D dengan diskritasi *pseudo-spectral* yang didasarkan pada polinomial Chebyshev, metode ini mencapai hasil yang akurat hingga nilai Ra 10^8 . Wilson dan Demuren (1998), memperkenalkan skema kompak beda hingga dengan akurasi orde-4 dan orde-6. Skema kompak orde-4 memiliki grid stensil yang sama dengan skema beda hingga orde-dua, sehingga mempermudah penerapan pada model matematika. Azwadi (2009), memprediksi konveksi alami pada kotak berongga menggunakan metode beda hingga dan metode Lattice Bolzmann. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode Lattice Bolzmann sangat efisien dan stabil untuk Ra rendah dan sedang (Ra=10³ sd Ra=10⁵). Azwadi dan Idris (2010), menggunakan metode beda hingga dan Lattice Bolzmann untuk pemodelan simulasi konveksi alami dalam kotak berongga dengan sisi atas dan bawah dipanaskan secara linier pada Ra 10³-10⁵. Hasil perbandingan kedua metode tersebut memiliki kesesuaian yang baik.

Penelitian yang dilakukan adalah menyelesaikan permasalahan konveksi alami dalam kotak 2-D dengan menggunakan skema kompak beda hingga orde-4 untuk turunan ruang dan skema Runge-Kutta orde-4 untuk turunan waktu dengan variasi panas dari bawah. Hasil penelitian dibandingkan dengan hasil penelitian dari Azwadi (2009), dan Azwadi, Idris (2010).

2 PERSAMAAN ATUR KONVEKSI ALAMI

Konveksi alami adalah perpindahan panas di antara permukaan dan fluida yang bergerak di atasnya, dimana gerakan fluida disebabkan oleh gaya apung yang timbul karena perbedaan density akibat perbedaan tekanan di dalam aliran (Oosthuizen,1999).

Perbedaan temperature yang terjadi dalam konveksi alami adalah sangat kecil, maka berlaku pendekatan Boussinesq, yaitu analisis mengenai aliran pada konveksi alami, properties fluida yang ada diasumsikan konstan kecuali perubahan density terhadap temperature yang menyebabkan munculnya gaya apung (Oosthuizen, 1999). Persamaan atur konveksi alami dalam bentuk variabel tak berdimensi adalah sebagai berikut (Le Quere,1990):

Persamaan Kontinuitas :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Persamaan Navier Stokes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Pr\theta \quad (3)$$

Persamaan Energi :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Ra^{0.5}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Persamaan di atas diperoleh dengan membagi variabel berdimensi dengan variabel referensi.

3. DISKRITISASI WAKTU

Diskritisasi waktu untuk persamaan momentum menggunakan skema Runge- Kutta orde-4 yang didefinisikan sebagai berikut :

$$u^{M+1} = u^M + b^{M+1} \Delta t H_i^M \quad (5)$$

dimana :

$$\begin{aligned} \Delta t &= \text{langkah waktu} \\ b^M &= \text{koefisien skema Runge-Kutta} \\ d^M &= \text{koefisien skema Runge-Kutta} \\ u_i^M &= \text{komponen kecepatan arah } x_i \text{ pada} \\ &\quad \text{sub tingkat ke-}M \\ P_i^M &= \text{Tekanan} \\ H_i^M &= -u_j \delta_x u_i^M - \partial P_i^M \\ &+ \frac{Pr}{Ra^{0.5}} \delta_{xx} u_i^M + a^M H_i^{M-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Tabel 1. Koefisien Runge-Kutta orde-4 dari Carpenter dan Kennedy

M	a^M	b^M
1	0	0.14965902
2	-0.41789047	0.37921031
3	-1.19215169	0.82295502
4	-1.69778469	0.69945045
5	-1.51418344	0.15305724

4. DISKRITISASI RUANG

Turunan pertama.

Diskritisasi turunan pertama dengan skema kompak orde-4 dan orde-6 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha \Phi_{i-1}^+ + \Phi_i^+ + \alpha \Phi_{i+1}^+ &= \frac{a}{2\Delta x} (\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}) \\ &+ \frac{b}{4\Delta x} (\Phi_{i+2} - \Phi_{i-2}) \end{aligned} \quad (7)$$

dengan :

$$\Delta x = L_x / N_x$$

N_x = jumlah grid point

Φ_i^+ = turunan pertama Φ_i terhadap x

α, a, b = koefisien skema kompak

Untuk skema orde-4 maka ; $\alpha=1/4$, $a=3/2$ dan $b=0$.
Untuk skema orde-6 maka; $\alpha=1/4$, $a=14/9$, dan $b=1/9$.

Turunan kedua.

Diskritisasi turunan kedua adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha \Phi_{i-1}^{\prime\prime} + \Phi_i^{\prime\prime} + \alpha \Phi_{i+1}^{\prime\prime} &= \frac{a}{(\Delta x)^2} (\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}) \\ &+ \frac{b}{4(\Delta x)^2} (\Phi_{i+2} - 2\Phi_i + \Phi_{i-2}) \end{aligned} \quad (8)$$

dimana :

$\Phi_i^{\prime\prime}$ = turunan kedua Φ_i terhadap x

α, a, b = koefisien skema kompak

Untuk orde-empat, $\alpha=1/10$, $a = 6/5$, $b=0$ dan untuk orde-enam, $\alpha=2/11$, $a = 12/11$, $b=3/11$

5. METODE KOMPRESIBILITAS TIRUAN

Konsep metode kompresibilitas tiruan adalah menambahkan turunan waktu pada persamaan kontinyuitas. Bentuk persamaannya adalah :

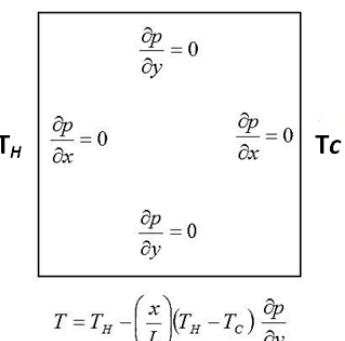
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon \nabla V = 0 \quad (9)$$

dimana ε adalah konstanta positif. Persamaan ini tidak mempunyai arti fisik jika kondisi tunak belum tercapai.

6. DOMAIN DAN SYARAT BATAS

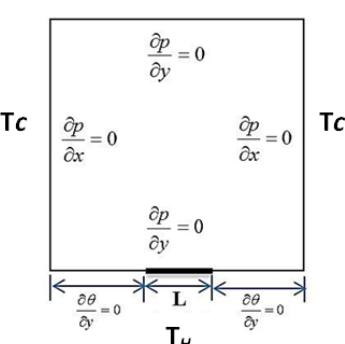
Kasus yang dibahas adalah konveksi alami dalam kotak 2-D dengan syarat batas sebagai berikut :

$$T = T_H - \left(\frac{x}{L} \right) (T_H - T_c) \frac{\partial p}{\partial y}$$



Gambar 1. Domain 1

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$



Gambar2. Domain 2**6. HASIL DAN PEMBAHASAN**

Hasil perhitungan domain 1 dibandingkan dengan penelitian Aswadi dan Idris(2010), pada $Ra = 10^3, 10^4$, dan 10^5 yang diperlihatkan pada table 2.

Tabel 2. Perbandingan bilangan Nusselt domain 1

Ra \ Metode	LBM	FD Approach	Compact Scheme	Beda FD - Compact scheme (%)	Beda LBM - Compact scheme (%)
Ra= 10^3	1.056	1.046	1.045	0.095	1.052
Ra= 10^4	1.807	1.766	1.747	2.774	3.43
Ra= 10^5	3.517	3.489	3.356	3.811	4.797

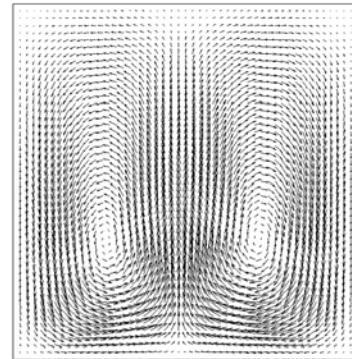
Dari tabel 2. dapat dilihat bahwa hasil perhitungan menunjukkan kedekatan yang baik dengan hasil penelitian dari Aswadi dan Idris (2010) sehingga metode yang digunakan dalam penelitian ini dapat diterima.

Tabel 3. Perbandingan jumlah grid domain 1

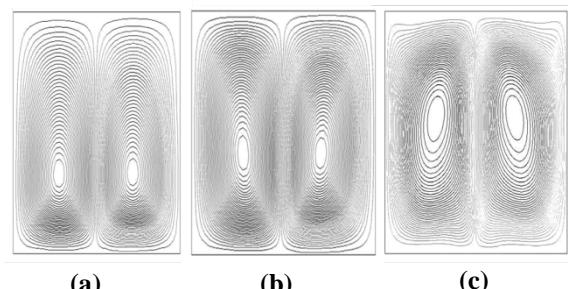
Ra \ Metode	LBM	Compact Scheme	Lama Iterasi Program
Ra= 10^3	101x101	41x41	00:04:30:72
Ra= 10^4	151x151	51x51	00:06:30:12
Ra= 10^5	201x201	81x81	00:11:36:19

Table 3 menunjukkan bahwa pemodelan skema kompak orde-4 lebih efisien karena menggunakan jumlah grid yang lebih sedikit.

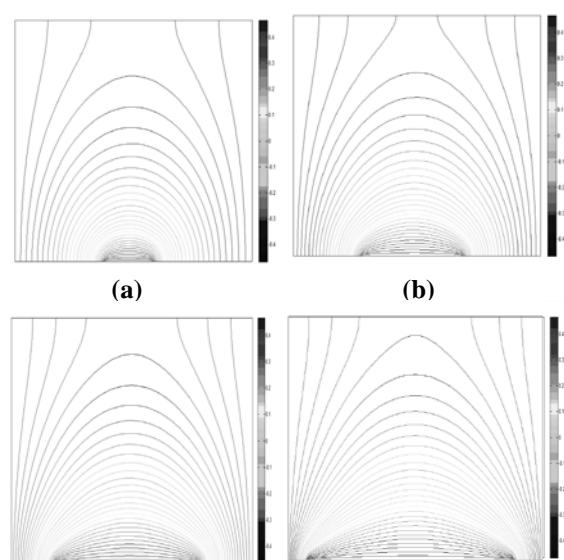
Domain 2 digunakan untuk memodelkan fenomena konveksi alamiah dalam kotak persegi 2-D, dengan pemanasan lokal dari bawah dan pendinginan simetris dari samping. Variasi panas dinding bawah adalah $L= H/5$, $L= 2H/5$, $L= 3H/5$ dan $L= 4H/5$. Hasil simulasi selengkapnya dapat dilihat sebagai berikut :

**Gambar 3.** Vektor kecepatan untuk $Ra= 10^4$, $L= 1H/5$

Gambar 3. menunjukkan bahwa fluida panas naik di atas sumber panas menuju dinding atas dan bergerak di sepanjang dinding horizontal sebelum turun ke bawah di sepanjang dinding samping akibat pengaruh pendinginan. Fenomena yang sama terlihat dalam simulasi yang di lakukan yaitu untuk $L=2H/5$, $L=3H/5$, dan $L=4H/5$.

**Gambar 4.** Streamline untuk (a) $Ra= 10^3$, (b) $Ra= 10^4$, (c) $Ra= 10^5$

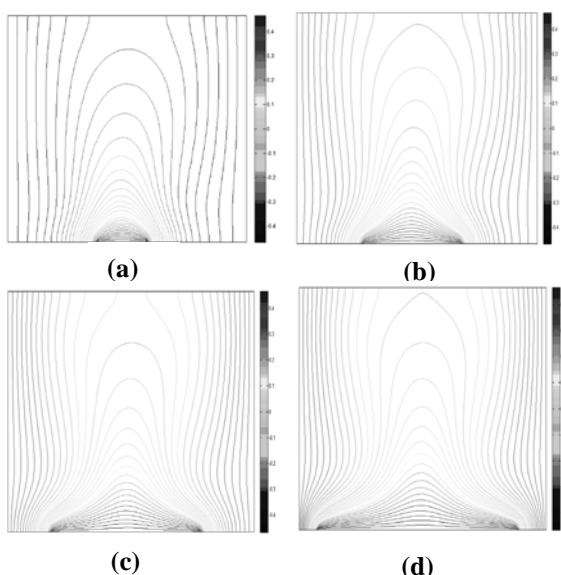
Arah aliran fluida adalah searah jarum jam pada sisi kanan dan berlawanan jarum jam pada sisi kiri. Pola aliran yang ditunjukkan adalah identik bentuknya namun berbeda arah gerakan fluidanya.





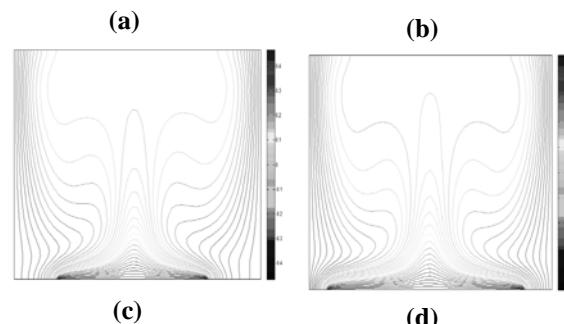
Gambar 5. Pola Isotermal untuk $Ra = 10^3$ (a) $L = H/5$ dan (b) $L = 2H/5$ (c) $L = 3H/5$ dan (d) $L = 4H/5$.

Pada $Ra = 10^3$ menunjukkan intensitas konveksi masih sangat lemah dan mekanisme transfer panas utama yang terjadi masih menggunakan konduksi. Rongga mulai menunjukkan peningkatan dan inti sel bergerak ke atas.



Gambar 6. Pola Isotermal untuk $Ra = 10^4$ (a) $L = H/5$ dan (b) $L = 2H/5$ (c) $L = 3H/5$ dan (d) $L = 4H/5$.

Pada $Ra = 10^4$ menunjukkan bahwa intensitas resirkulasi meningkat seiring meningkatnya Ra . Pergerakan fluida sudah dapat diamati, fluida panas pada gambar 6. (c) naik vertikal menuju keatas, karena adanya gaya apung disebabkan densitas yang turun karena temperatur naik sedangkan fluida dingin yang berada di samping kanan dan kiri bergerak ke bawah karena densitas yang lebih besar akibat proses pendinginan dan karena adanya gaya grafitasi. Hal ini menunjukkan perpindahan panas konveksi sudah terjadi

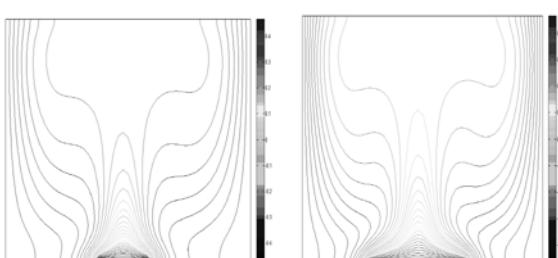


Gambar 7. Pola Isotermal untuk $Ra = 10^5$ (a) $L = H/5$ dan (b) $L = 2H/5$ (c) $L = 3H/5$ dan (d) $L = 4H/5$

Dengan meningkatnya Ra lapisan batas termal semakin terlihat jelas, semakin besar Ra yang digunakan menyebabkan nilai Nu rata rata meningkat. Untuk semua nilai Ra , meningkatnya L untuk hasil Ra tetap, menyebabkan meningkatnya Nusselt rata-rata (tabel 4).

Tabel 4 Nilai Bilangan Nussel terhadap variasi panjang pemanas L .

Ra	Variasi L	Nusselt
10^3	1H/5	0.618
	2H/5	0.864
	3H/5	1.168
	4H/5	1.640
10^4	1H/5	0.732
	2H/5	1.099
	3H/5	1.515
	4H/5	2.012
10^5	1H/5	2.550
	2H/5	4.020
	3H/5	5.521
	4H/5	6.709
10^6	1H/5	6.568
	2H/5	9.236
	3H/5	11.912
	4H/5	14.840
10^7	1H/5	30.940
	2H/5	36.752
	3H/5	41.404
	4H/5	48.831
10^8	1H/5	122.973
	2H/5	125.768
	3H/5	131.953



	4H/5	136.138
--	------	---------

7. KESIMPULAN

Dari penelitian ini dapat disimpulkan bahwa:

1. Hasil penelitian memiliki kedekatan yang baik dengan hasil penelitian dari Aswadi dan Idris (2010) pada $Ra=10^3$, $Ra=10^4$ maupun pada $Ra=10^5$.
2. Metode yang digunakan lebih efisien karena untuk kasus yang sama memiliki jumlah grid yang lebih sedikit.
3. Untuk semua nilai Ra, meningkatnya area pemanasan L, menyebabkan meningkatnya Nusselt rata-rata.

DAFTAR PUSTAKA

1. Aswadi, C.S.N, 2009, *Prediction of Natural Convection in a Square Cavity with Partially Heated from Below and Symmetrical Cooling from Side by Finite Difference Lattice Boltzmann Method*, European Jurnal of Scientific Research Vol. 35 pp. 347-354.
2. Aswadi, C.S.N, Idris, M.S, 2010, *Finite Difference and Lattice Boltzmann Modelling For Simulation Of Natural convection In a Square Cavity*, IJME Vol.5 pp. 80-86.
3. Domuren, A.O, Wilson, R.V, Carpenter, M. 1998, *Higher-Order Compact Schemes for Numerical Simulation of Incompressible Flows*, NASA/CR-1998-206922.
4. Hoffman, Klaus A. 2000, *Computation Fluid Dynamics For Engineering Volume I*, Texas, USA: Engineering System™ Austin.
5. Holman, JP., 1997, *Perpindahan Kalor*, Jakarta: Erlangga
6. Oosthuizen, PH. 1999. *An Introduction to Convective Heat Transfer Analysis*. New York : McGraw-Hill.