STUDI PENGARUH UKURAN ELEMEN RELATIF TERHADAP AKURASI HARGA DOMAIN DEKAT BATAS DALAM ANALISIS STRUKTUR MENGGUNAKAN METODE ELEMEN BATAS

M. Ridlo E. Nasution dan Djarot Widagdo

Program Studi Aeronotika dan Astronotika
Fakultas Teknik Mesin Dan Dirgantara, Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha 10 Bandung 41032
Jawa Barat, Indonesia
Telp. : +62-22-2504529, Fax : +62-22-2534164, E-mail : dwidagdo@ae.itb.ac.id

ABSTRAK

Metode elemen batas adalah salah satu pendekatan numerik yang dikembangkan untuk analisis masalah teknik. Metode numerik hasil pengembangan formulasi dasar integral konservasi kerja dimana bentuk integral domain ditransformasi menjadi integral batas membuat kebutuhan diskritisasi untuk penyelesaian secara numerik hanya dilakukan pada batas. Pendefinisian formulasi analitik dan numerik integral batas ini memberikan beberapa keuntungan yaitu diskritisasi hanya pada batas yang akan memberikan kemudahan dalam pendeskripsian model oleh pengguna dan membuat proses perhitungan numerik menjadi lebih cepat. Penyelesaian secara integral numerik juga memberikan hasil analisis yang lebih akurat. Selain itu penghitungan harga dalam domain yang dilakukan secara analitik sebagai fungsi dari harga pada seluruh batas memberikan hasil yang eksak relatif terhadap harga pada batas. Beberapa hal tersebut merupakan keunggulan metode elemen batas dibandingkan dengan pendekatan numerik yang membutuhkan diskritisasi pada domain seperti metode elemen hingga. Keuntungan tersebut yang membuat metode elemen batas cocok untuk dipakai menganalisis model yang memiliki singularitas atau konsentrasi tegangan seperti misalnya akibat adanya cacat geometri berupa lubang atau retak. Walaupun bila dilihat dari formulasi dasar yang digunakan, dapat diharapkan penghitungan secara analitis harga dalam domain memberikan hasil yang cukup akurat, pada kenyataannya ada kondisi yang perlu diperhatikan ketika menghitung harga domain yang posisinya berada dekat batas.

Dalam studi ini dilakukan kajian untuk mengatasi masalah akurasi tersebut. Sebagai parameter digunakan rasio antara jarak dari titik di dalam domain dekat batas yang akan dihitung harga besaran tegangan terhadap ukuran elemen batasnya. Dalam studi ini parameter tersebut akan divariasikan untuk dilihat pengaruhnya terhadap akurasi harga pada domain dekat batas dengan membandingkannya terhadap perhitungan analitik.

Keywords: metode elemen batas, analisis struktur, harga internal point

1. Pendahuluan

Metode elemen batas merupakan salah satu metode numeric yang dikembangkan untuk berbagai macam analisis masalah teknik, salah satunya pada analisis struktur. Secara umum, metode numerik ini dikembangkan dengan latar belakang utama untuk menghasilkan metode numeric dengan proses pemodelan dan diskritisasi model (meshing) yang lebih mudah dan sederhana. dipilih karena membutuhkan waktu proses yang cepat dalam perhitungan numeriknya. Akan tetapi, Selain itu keunggulan metode elemen batas adalah dari hasil perhitungan harga besaran, misalnya perpindahan dan traksi, yang relative lebih akurat dibandingkan dengan hasil perhitungan metode numeric yang berdasarkan elemen hingga. Tingkat akurasi yang lebih baik, mendekati hasil perhitungan analitik, ini disebabkan dari digunakannya integrasi numeric untuk mendefinisikan matriks hubungan antara berbagai besaran tersebut. tidak hanya terbatas pada hal tersebut. Pemecahan integral batas secara numerik dapat menghasilkan solusi pada batas dengan akurasi yang dapat dikatakan menyamai hasil perhitungan analitik. Dengan solusi harga pada batas yang akurat, maka diharapkan solusi harga pada domain juga akan memiliki akurasi yang baik karena harga pada domain bergantung secara langsung dari harga pada batas. Akan tetapi, ketidakakuratan selalu terjadi pada proses komputasi numerik. Salah satunya adalah hasil perhitungan tegangan dan perpindahan pada harga domain dekat batas dapat menjadi tidak akurat apabila letaknya terlalu dekat relatif terhadap nodal batas.

Pada studi ini, dilakukan variasi parameter panjang elemen dan jarak internal point terhadap nodal batas terdekat untuk menentukan rasio yang relatif tepat untuk dapat menghasilkan nilai yang akurat. Hal ini dilakukan untuk mengetahui seberapa dekat jarak yang diperbolehkan untuk meletakkan internal point sehingga tidak merusak interpolasi distribusi tegangan dan perpindahan pada keseluruhan struktur.

2. Metode Elemen Batas

Formulasi elemen batas yang digunakan dalam studi ini dibangun dari persamaan diferensial kesetimbangan yang menyatakan kondisi tegangan pada suatu benda solid yang kemudian dengan teorema transformasi Gauss dan dasar *Betti's Reciprocal*, persamaan diferensial kesetimbangan tersebut ditransformasi menjadi persamaan integral batas berikut [1]:

$$\int_\Gamma p_i u_i^* d\Gamma + \int_\Omega b_i u_i^* d\Omega = \int_\Gamma p_i^* u_i d\Gamma + \int_\Omega b_i^* u_i d\Omega \qquad (1)$$

dimana *p* merupakan traksi, *b* adalah *body force*, *u* adalah perpindahan, dan * merupakan indeks properti pada domain (Ω) tak hingga. Sebagai latar belakang dari pengembangan metode elemen batas, keuntungan penyelesaian masalah analisis struktur dengan dalam bentuk formulasi numeric dari persamaan integral adalah kemudahan dalam pendefinisian mesh dan akurasi penghitungan sebagai cirri dari integrasi numeric.

Dengan mengasumsikan tidak terdapatnya body force yang bekerja pada domain, maka integral kedua pada sisi kiri persamaan (1) dapat dihilangkan. Kemudian dengan mendefiniskan b* sebagai point load dalam bentuk dirac delta function, maka persamaan (1) dapat didefinisikan sebagai persamaan integral batas (Γ) berikut:

$$c_{lk}^i u_k^i + \int_\Gamma p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_\Gamma u_{lk}^* p_k d\Gamma \qquad (2)$$

Selanjutnya, formulasi persamaan integral batas ini diselesaikan secara numeric untuk menghitung harga pada batas. Untuk penyelesaian secara numeric, batas domain, dimana integral persamaan (2) dan (3) berlaku, dibagi menjadi rangkaian (mesh) elemen. Integrasi kemudian dilakukan secara local pada setiap elemen dengan metoda intergral numeric *Gaussian Quadrature*. Metoda kuadratur ini dipilih dikarenakan hasilnya yang cukup akurat mendekati perhitungan analitik. Dengan ini tentunya dapat diharapkan bahwa penyelesaian sistem persamaan diferensial parsial yang telah dimodifikasi menjadi sistem persamaan linear ini akan menghasilkan solusi pada batas yang akurat.

Dengan penggunaan dirac delta function sebagai unit load b*, maka besaran u* dan p* adalah masing – masing merupakan solusi fundamental perpindahan (displacement) dan traksi (traction) ynag untuk kasus elastic linier didefinisikan *Kelvin's Solution* sebagai berikut:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\ln\frac{1}{r}\delta_{lk} + r_{,l}r_{,k}\right] \qquad (3)$$

untuk perpindahan dan

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left[\begin{array}{l}\frac{\partial r}{\partial n}\left[(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}\right] \\ +(1-2\nu)\left(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}\right)\end{array}\right] \qquad (4)$$

dimana:
r = jarak dari *source point* menuju *field point*
n = *vector normal* pada *field point*
μ = modulus geser
ν = Poisson's ratio
δ_{ij} = *Kronecker delta* yang berharga 1 apabila *i=j* dan berharga 0 apabila *i≠j*

Dengan menggunakan definisi solusi fundamental (3) dan (4) maka dapat diperoleh persamaan matriks dari persamaan (2) yaitu:

$$[H][U]=[G][P] \qquad (5)$$

Dengan pengelompokan berdasarkan besaran yang sudah dan belum diketahui maka persamaan (5) dapat ditransformasi menjadi hubungan:

$$[A][X]=[F] \qquad (6)$$

dimana komponen matriks *H* dan *G* yang berkaitan dengan perpindahan dan traksi yang belum diketahui tersebut dikumpulkan pada matriks *A* dan matriks F merupakan hasil perkalian komponen perpindahan dan traksi yang telah diketahui nilainya dengan komponen matriks *H* dan *G* yang berkaitan dengannya. Penyelesaian persamaan matriks tersebut akan menghasilkan solusi harga pada batas yang belum diketahui (komponen matriks X).

Dengan diperolehnya seluruh harga pada batas, harga pada domain (internal point) dapat diperoleh dengan menggunakan secara langsung persamaan (2) yaitu:

$$u^i = \sum_{j=1}^{NE}\left\{\int_{\Gamma_j} u^*\Phi d\Gamma\right\}p^j - \sum_{j=1}^{NE}\left\{\int_{\Gamma_j} p^*\Phi d\Gamma\right\}u^j \qquad (7)$$

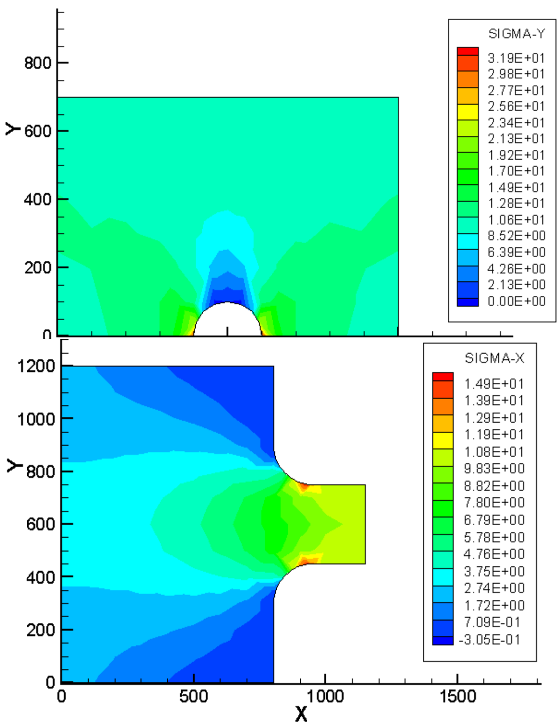
untuk menghtiung harga perpindahan. Sementara itu untuk menghitung harga tegangan pada *internal point* digunakan persamaan sebagai berikut:

$$\sigma_{kl}^i = \sum_{j=1}^{NE}\left\{\int_{\Gamma_j} D_{kl}\Phi d\Gamma\right\}p^j - \sum_{j=1}^{NE}\left\{\int_{\Gamma_j} S_{kl}\Phi d\Gamma\right\}u^j \qquad (8)$$

Detail dari pengembangan dan penggunaan formulasi elemen batas sebagaimana telah disampaikan dapat dilihat di referensi [1].

3. Hasil Perhitungan

Secara umum solusi metode elemen batas memberikan akurasi yang sangat baik terutama untuk menggambarkan kondisi dimana terjadi konsentrasi tegangan sebagaimana ditunjukkan pada gambar 1. Akan tetapi untuk harga misalnya tegangan geser pada daerah dekat batas dapat terjadi ketidak akuratan harga.



Gambar 1. Distribusi dengan konsentrasi tegangan

Untuk memahami dan mengatasi masalah tersebut maka pada studi ini dilakukan tinjauan terhadap pengaruh ukuran elemen relative terhadap jarak internal poin ke batas. Sebagai objek kajian pertama digunakan model cantilever beam dengan geometri dan pembebanan geser seperti ditunjukkan pada gambar 2. Beam terbuat dari material dengan modulus elastisitas 70 GPa dan Poisson's ratio 0.3. Untuk melakukan kajian model didiskritisasi dengan beberapa variasi ukuran elemen. Gambar 3 menunjukkan model yang didiskritisasi menjadi 22 elemen dengan ukuran elemen 100 mm, sedangkan dari gambar 4 dapat dilihat diskritisasi 44 elemen pada model dengan ukuran elemen 50 mm.

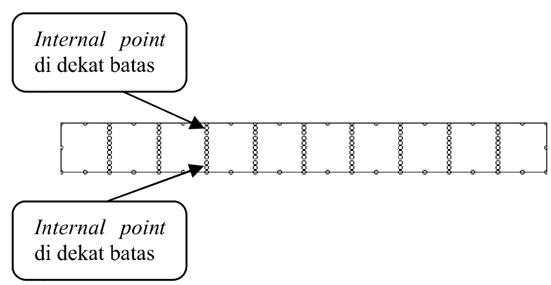
Validasi perhitungan tegangan geser dilakukan dengan menggunakan persamaan analitik [2]:

$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad (9)$$

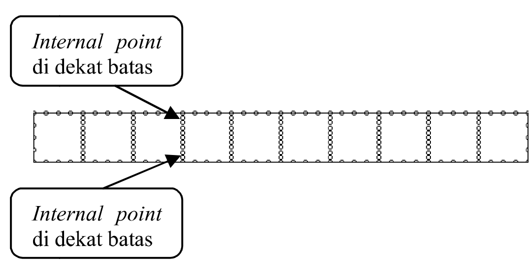
dimana:
τ = tegangan geser arah xy
V = gaya lintang
Q = perkalian antara luas area di atas titik analisis (A) dengan jarak antara *centroid* A terhadap *neutral axis*.
I = momen inersia sumbu z
t = tebal struktur

Pengaruh ukuran elemen terhadap akurasi harga tegangan geser ditunjukkan pada gambar 5 yang menunjukkan dengan elemen yang lebih kecil diperoleh harga yang lebih mendekati harga analitik. Secara lebih spesifik dalam studi ini digunakan rasio antara ukuran elemen terhadap jarak lokasi internal point dengan batas. Hasil analisis untuk berbagai ukuran elemen sebagaimana dapat dilihat pada gambar .. menunjukkan rasio 3 sudah memberikan hasil perhitungan tegangan geser yang mendekati harga analitik.

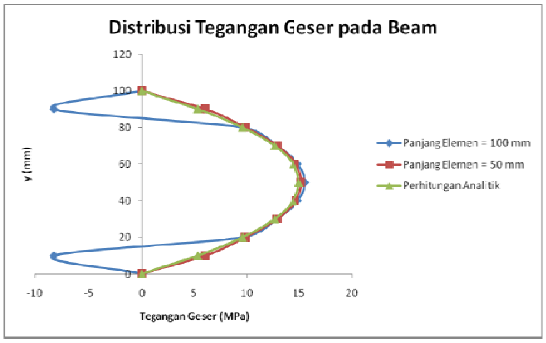
Gambar 2. Kasus beban geser pada *beam*



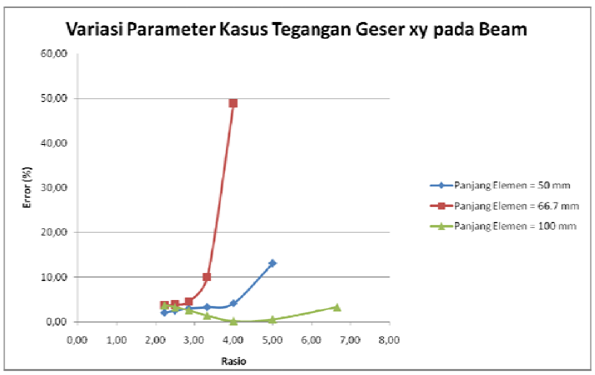
Gambar 3. Model *beam* dengan 22 elemen (panjang elemen =100 mm)



Gambar 4. Model *beam* dengan 44 elemen (panjang elemen = 50 mm)

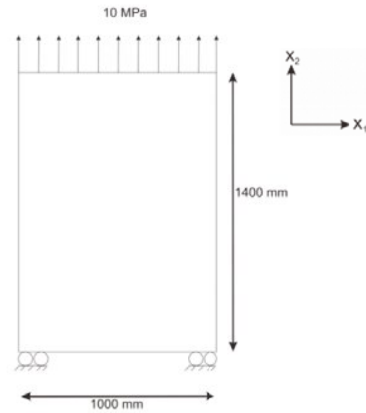


Gambar 5. Distribusi tegangan geser pada beam (x = 100 mm)

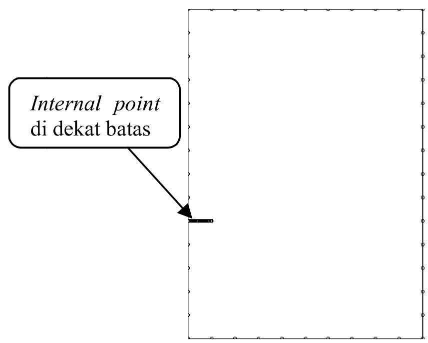


Gambar 6. Hasil variasi parameter kasus tegangan geser arah xy pada *beam*

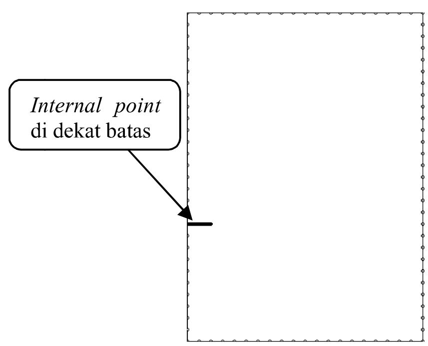
Sebagai objek kajian kedua adalah pelat datar yang mendapat beban tarik dan terbuat dari material sama dengan objek analisis pertama. Geometri dan pembebanan ditunjukkan pada gambar 7. Diskritiasi model menjadi 24 dan 48 elemen dengan lokasi internal point yang dilihat harga perpindahan dan tegangannya ditunjukkan pada gambar 8 dan 9. Hasil analisis sebagaimana ditunjukkan pada gambar 10 dan 11 menunjukkan panjang elemen terhadap akurasi perhitungan harga perpindahan dan tegangan. Serupa dengan kajian pada objek sebelumnya, bila digunakan harga rasio ukuran elemen terhadap jarak internal point ke batas maka dapat ditunjukkan hasilnya seperti ditampilkan pada gambar 12 dan 13. Pada analisis pelat datar ini rasio sebesar 5 sudah memberikan akurasi perhitungan harga yang cukup baik.



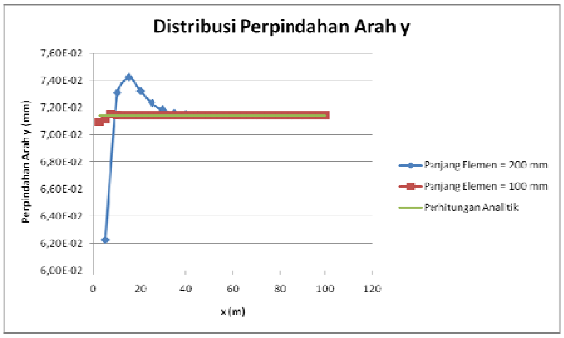
Gambar 7. Kasus beban tarik pada pelat datar



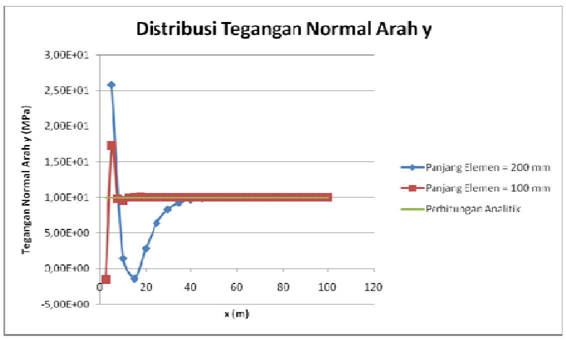
Gambar 8. Pelat datar dengan 24 elemen (panjang elemen = 200 mm)



Gambar 9. Pelat datar dengan 48 elemen (panjang elemen = 100 mm)



Gambar 10. Distribusi perpindahan arah y pada pelat datar (y = 500 mm)

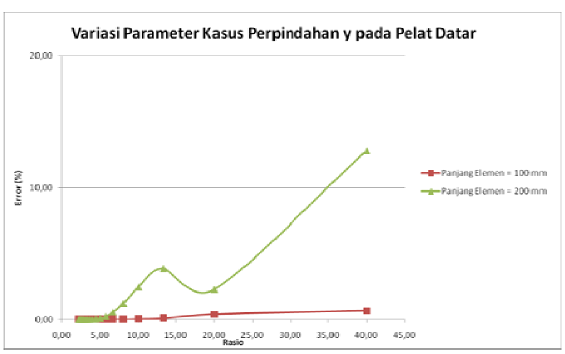


Gambar 11. Distribusi tegangan normal arah y pada pelat datar (y = 500 mm)

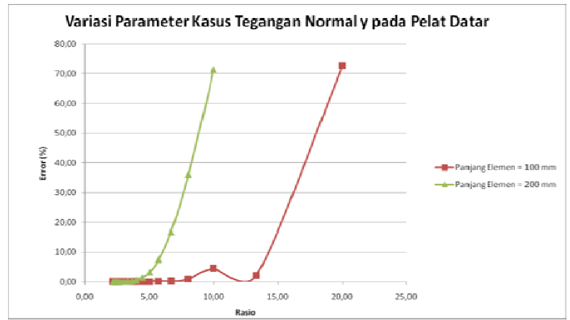
Validasi perhitungan perpindahan arah y dilakukan dengan menggunakan persamaan:

$$\delta = \sigma \frac{L}{E} \qquad (10)$$

dimana:
δ = perpindahan
σ = tegangan normal
L = panjang struktur
E = modulus elastisitas



Gambar 12. Hasil variasi parameter kasus perpindahan arah y pada pelat datar



Gambar 13. Hasil variasi parameter kasus tegangan normal arah y pada pelat datar

5. Analisis dan Simpulan

Secara umum, hasil-hasil yang diperoleh dari analisis menunjukkan bahwa terdapat ketidakakuratan pada perhitungan harga pada domain di dekat batas, Akan tetapi, penambahan jumlah elemen, atau juga pengurangan panjang elemen, akan memperbaiki harga-harga tersebut. Dengan melakukan variasi panjang elemen dengan jarak *internal point* terhadap nodal batas terdekat ini dapat diketahui rasio antara kedua hal tersebut yang baik dan tidak menimbulkan ketidakakurasian yang akan merusak interpolasi harga pada domain.

Dengan melihat kontur distribusi, maka pada cantilever beam dimana profilnya tidak merata dibutuhkan rasio yang lebih kecil dbandingkan bila profilnya lebih seragam sebagaiamana pada kasus analisis pelat datar.

Selain itu, hasil kajan juga menunjukkan bahwa pengaruh rasio sangat sensitif pada distribusi tegangan dibandingkan distribusi perpindahan pada domain.

Pada kedua kasus tersebut, besar rasio yang dibutuhkan untuk menghasilkan harga domain dengan akurasi yang baik bervariasi. Akan tetapi, untuk memenuhi harga error di bawah 10% pada kedua kasus tersebut dapat digunakan besar rasio di bawah 5. Meskipun demikian, untuk mengesahkan angka tersebut sebagai rasio maksimum yang terbaik masih memerlukan pengkajian dengan berbagai macam kasus yang lain.

Referensi

[1] Brebbia, C.A., Dominguez, J., *Boundary Elements An Introductory Course, Second Edition*, McGraw-Hill Book Company, UK, 1992.

[2] Hibbeler, R.C., *Mechanics of Materials, Sixth Edition*, Pearson Prentice Hall, Singapore, 2005.

[3] Nasution, M.R.E., *Pengembangan Perangkat Lunak Analisis Struktur Dua Dimensi Berbasis Metode Elemen Batas, Tugas Akhir Sarjana*, Institut Teknologi Bandung, Indonesia, 2010.