

A. NUMERICAL SIMULATION OF NATURAL CONVECTION HEAT TRANSFER ON TWO-DIMENSIONAL BOX USING HIGH-ORDER COMPACT SCHEME

Eko Prasetya Budiana and Sutrisno

Departement of Mechanical Engineering, Gadjah Mada University,
Jl. Grafika 2 Yogyakarta, Indonesia 52281. Email: sutrisno@ugm.ac.id

ABSTRACT

A higher-order compact schemes originally developed by Wilmand Demuren (1998) has been reproduced for solving steady natural convection for 2-D problem. The method is based on low-storage Runge-Kutta schemes for temporal discretization and fourt-order compact finite difference schemes for spatial discretization. Difficulty related to the pressure can be overcome by using artificial compressibility method. For high Rayleigh Number (10^7 - 10^9) the result have a good agreement with the result obtain by Le Quere.

Key word: compact schemes, natural convection

PENDAHULUAN

1. Persamaan Atur Konveksi Alami

Dalam bentuk dua dimensional, persamaan atur untuk aliran konveksi alami dapat disajikan seperti berikut (Le Quere,1990):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{Pr}{Ra^{0.5}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Pr\theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Ra^{0.5}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Bentuk non-dimensional ini diperoleh dengan membagi variabel-variabel dengan harga referensi yang bersangkutan, untuk panjang $Lr = H$, kecepatan $Vr = (\alpha/H)Ra^{0.5}$, bilangan Rayleigh $Ra = (g\beta\Delta TH^3)/(v\alpha)$, referensi waktu $tr = (H^2/\alpha) Ra^{-0.5}$. Untuk temperatur, dengan penggunaan definisi-definisi berikut : $\theta = (T-Tr)/(Th-Tc)$, $Tr = (Th+Tc)/2$ dan $Pr = (v/\alpha)$.

2. Diskritasi Waktu

Diskritasi waktu untuk persamaan momentum yang dipergunakan untuk *Runge- Kutta scheme* orde-4 dari Williamson dan Demuren (1998) didefinisikan sebagai berikut:

$$u^{M+1} = u^M + b^{M+1} \Delta t H_i^M \quad (5)$$

yang dalam hal ini, Δt = time step, b^M = Runge-Kutta *scheme coefficient*, a^M = Runge-Kutta *scheme coefficient*, u_i^M = komponen kecepatan arah x_i pada sub tingkat ke-M, P_i^M = tekanan.

$$H_i^M = -u_j \delta_x u_i^M - \partial P_i^M + \frac{\Pr_{0.5}}{Ra} \delta_{xx} u_i^M + a^M H_i^{M-1}$$

Tabel 2.1 Runge-Kutta *scheme coefficient* orde-4 dari Carpenter dan Kennedy

M	a ^M	B ^M
1	0	0.14965902
2	-0.41789047	0.37921031
3	-1.19215169	0.82295502
4	-1.69778469	0.69945045
5	-1.51418344	0.15305724

3. Diskritasi Ruang

Skema beda-hingga orde-2 untuk turunan pertama memiliki galat dispersi yang besar, sedangkan skema kompak beda hingga memiliki kelebihan yaitu akurasi tinggi, fleksibel dan pengoperasianya lebih mudah.

a. Order Satu. Bentuk diskritisasi turunan pertama dengan pendekatan skema kompak beda hingga orde-4 dan orde-6 dirumuskan oleh Lele (Wilson dan Demuren, 1998). Bentuk persamaannya adalah seperti berikut :

$$\alpha \Phi_{i-1} + \Phi_i + \alpha \Phi_{i+1} = \frac{a}{2\Delta x} (\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}) + \frac{b}{4\Delta x} (\Phi_{i+2} - \Phi_{i-2}) \quad (6)$$

yang dalam hal ini :

$$\Delta x = L_x/N_x$$

$$N_x = \text{jumlah grid point}$$

$$\Phi_i = \text{turunan pertama dari variabel } \Phi_i \text{ terhadap } x$$

$$\alpha, a, b = \text{koefisien skema kompak}$$

Turunan terhadap y dan z dapat dilakukan dengan cara yang sama. Untuk skema orde-empat maka ; $\alpha=1/4$, $a=3/2$ dan $b=0$. Untuk skema orde-6 maka; $\alpha=1/4$, $a=14/9$, dan $b=1/9$.

Perbandingan skema ekplisit beda-hingga dan skema kompak beda hingga dari turunan pertama ditunjukkan dalam tabel 2.2 Di sini terlihat bahwa skema kompak beda hingga memiliki grid stensil yang lebih sedikit, koefisien galat pemenggalan berkurang menjadi $1/4$ untuk orde-4 dan $1/9$ untuk orde-6 dari koefisien beda tengah ekplisit untuk orde yang sama.

Table 2.2 Comparison between finite difference scheme and first order compact scheme

Skema	Kesalahan pemenggalan	Jumlah stensil
Beda tengah orde-4	$(-4/5!)(\Delta x)^4 \Phi^{(5)}$	5
Kompak orde-4	$(-1/5!)(\Delta x)^4 \Phi^{(5)}$	3
Beda tengah orde-6	$(-36/7!)(\Delta x)^4 \Phi^{(7)}$	7
Kompak orde-6	$(-4/7!)(\Delta x)^4 \Phi^{(7)}$	5

Menurut Hu dkk(1996) resolusi dari diskritisasi turunan pertama dapat dianalisa dengan mentransformasi persamaan konveksi 1-D sebagai berikut:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-N}^N a_l \Phi_{j+l} \quad (8)$$

Dalam mode Fourier $\Phi = \tilde{\Phi}(t)e^{ikx}$ maka :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} e^{ikx} \quad (9)$$

$$\Phi_{j+l} = \tilde{\Phi} e^{ik(x+l\Delta x)} \quad (10)$$

Sehingga persamaan konveksi 1-D menjadi :

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} e^{ikx} + \frac{c}{\Delta x} \sum_{l=-N}^N a_l \tilde{\Phi} e^{ik(x+l\Delta x)} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{c}{\Delta x} \sum_{l=-N}^N a_l \tilde{\Phi} e^{ikl\Delta x} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + i c k^* \tilde{\Phi} = 0 \quad (13)$$

where:

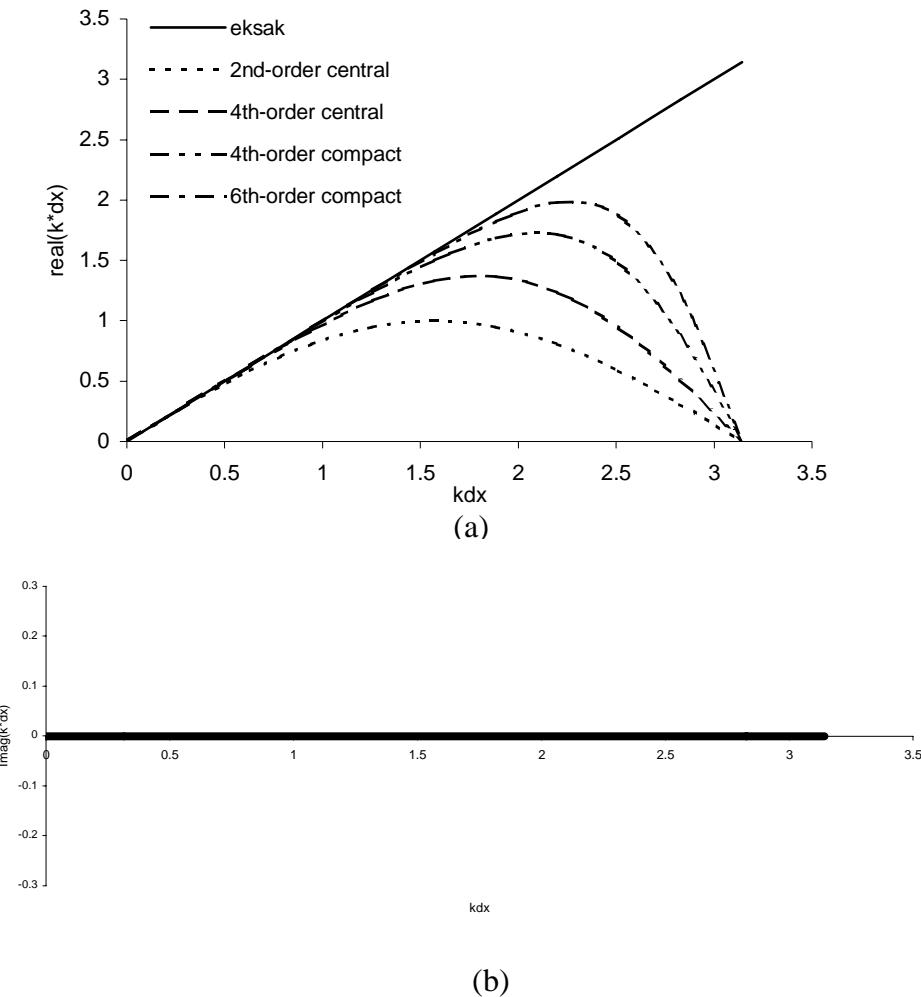
$$k^* = \frac{-i}{\Delta x} \sum_{l=-N}^N a_l e^{ikl\Delta x} \quad (14)$$

k^* was numerical wave number.

Numerical wave number untuk skema kompak beda hingga dari turunan pertama adalah :

$$k^* = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{a \sin(k\Delta x) + \frac{b}{2} \sin(2k\Delta x)}{2\alpha \cos(k\Delta x) + 1} \right] \quad (15)$$

Simpangan dari kurva $\text{real}(k^*)$ terhadap k menunjukkan galat dispersi dan simpangan dari kurva $\text{imag}(k^*)$ menunjukkan galat disipasi.



Gambar 2.1 Galat dispersi (a) dan galat disipasi (b) untuk pendekatan numerik
dari turunan pertama

Syarat batas diselesaikan dengan skema kompak orde-3 dengan persamaan sebagai berikut :

$$\Phi_1' + \alpha_{bs} \Phi_2' = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^3 a_{bsi} \Phi_i \quad (16)$$

$\alpha_{bs} = 2$ dan $a_{bs1} = -5/2$, $a_{bs2} = 2$, $a_{bs3} = 1/2$ adalah koefisien orde-3 dari syarat batas pada $i=1$.

Persamaan yang sama juga digunakan untuk syarat batas pada $i=N$.

Untuk skema orde-6, syarat batas diselesaikan dengan skema eksplisit beda-hingga orde-5 untuk titik $i=1$ dan $i=N$. Persamaan syarat batas adalah sebagai berikut :

$$\Phi_1' = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^8 a_{bsi} \Phi_i \quad (17)$$

dimana :

$$a_{bs1} = -296/105$$

$$a_{bs5} = -215/12$$

$$a_{bs2} = 415/48$$

$$a_{bs6} = 791/80$$

$$a_{bs3} = -125/8$$

$$a_{bs7} = -25/8$$

$$a_{bs4} = 985/48$$

$$a_{bs8} = 245/336$$

Untuk syarat batas pada $i=2$ dan $i=N-1$ juga digunakan skema eksplisit orde-lima sebagai berikut :

$$\Phi_2 = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^8 a_{nb} \Phi_i \quad (18)$$

dimana :

$a_{nb1} = -3/16$	$a_{nb5} = 115/144$
$a_{nb2} = -211/180$	$a_{nb6} = -1/3$
$a_{nb3} = 109/48$	$a_{nb7} = 23/40$
$a_{nb4} = -35/24$	$a_{nb8} = -1/72$

b. Turunan kedua. Persamaan skema kompak beda hingga untuk turunan kedua adalah sebagai berikut :

$$\alpha \Phi''_{i-1} + \Phi''_i + \alpha \Phi''_{i+1} = \frac{a}{(\Delta x)^2} (\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}) + \frac{b}{4(\Delta x)^2} (\Phi_{i+2} - 2\Phi_i + \Phi_{i-2}) \quad (19)$$

dimana :

Φ''_i = turunan kedua dari variabel Φ_i terhadap x

α, a, b = koefisien skema kompak beda hingga turunan kedua

Untuk orde-empat, $\alpha=1/10$, $a=6/5$, $b=0$ dan untuk orde-enam, $\alpha=2/11$, $a=12/11$, $b=3/11$

Perbandingan antara skema beda-hingga eksplisit dan skema kompak beda hingga ditunjukkan dalam tabel 2.3. Di sini terlihat bahwa skema kompak beda hingga memiliki stensil lebih sedikit, koefisien galat pemenggalan berkurang menjadi $\frac{1}{2}$ untuk orde-4 dan $\frac{1}{4}$ untuk orde-6 dari koefisien beda tengah eksplisit untuk orde yang sama.

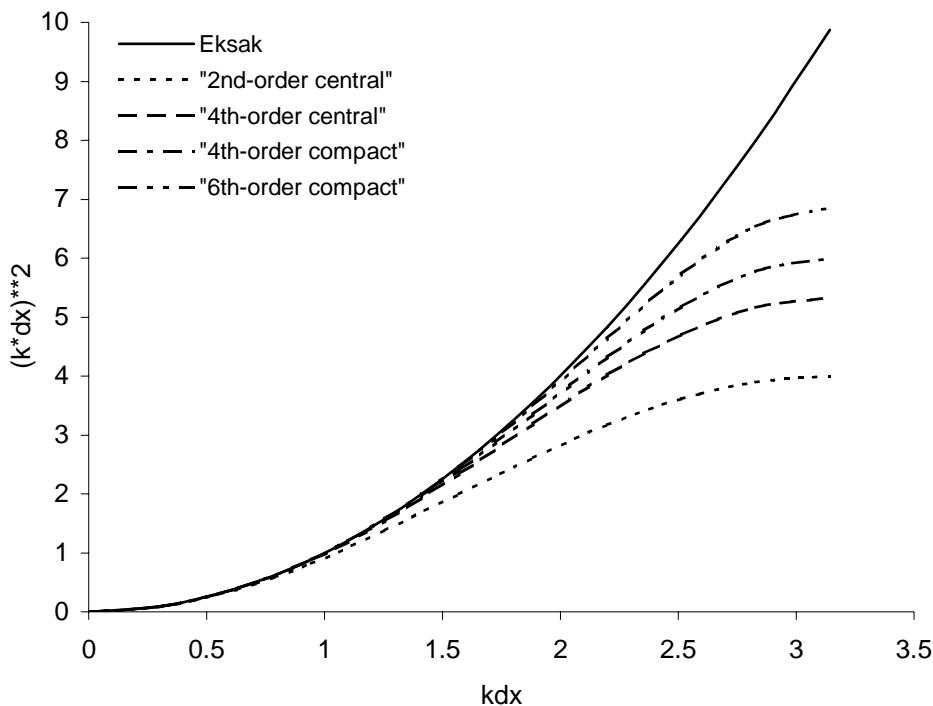
Tabel 2.3 Perbandingan skema beda hingga dan skema kompak turunan kedua

Skema	Kesalahan pemenggalan	Jumlah stensil
Beda tengah orde-4	$(-8/6!)(\Delta x)^4 \Phi^{(6)}$	5
Kompak orde-4	$(-3.6/6!)(\Delta x)^4 \Phi^{(6)}$	3
Beda tengah orde-6	$(-72/8!)(\Delta x)^6 \Phi^{(8)}$	7
Kompak orde-6	$(-16.7/8!)(\Delta x)^6 \Phi^{(8)}$	5

Analisa resolusi untuk turunan kedua dari pendekatan numerik skema kompak beda hingga dilakukan dengan cara yang sama dengan analisa turunan pertama. *Numerical wave number* untuk skema kompak beda hingga dari turunan kedua adalah :

$$(k^*)^2 = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[\frac{a[1 - \cos(k\Delta x)] + \frac{b}{2}[1 - \cos(2k\Delta x)]}{1 - 2\alpha \cos(k\Delta x)} \right] \quad (20)$$

Deviasi dari $(k^* \Delta x)^2$ terhadap $(k\Delta x)^2$ ditampilkan dalam bentuk grafik gambar 2.2 untuk beberapa skema beda-hingga.



Gambar 2.2 Galat disipasi untuk pendekatan numerik dari turunan kedua

Galat disipasi dari berbagai skema beda-hingga tampak pada gambar 2.2 dapat diketahui bahwa nilai *numerical wavenumber* untuk skema kompak lebih mendekati nilai *exact wavenumber*.

Kondisi batas pada $i=1$ dan $i=N$ diselesaikan dengan skema kompak orde-3 sebagai berikut :

$$\Phi_i'' + \alpha_{bs} \Phi_2'' = \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{i=1}^4 a_{bsi} \Phi_i \quad (21)$$

dimana, $\alpha_{bs}=11$ dan $a_{bs1}=13$, $a_{bs2}=-27$, $a_{bs3}=15$ dan $a_{bs4}=-1$ adalah koefisien skema kompak orde-3.

4. Metode Kompresibilitas Tiruan (*Artificial Compressibility*)

Konsep metode kompresibilitas tiruan adalah menambahkan turunan terhadap waktu pada persamaan kontinyuitas. Bentuk modifikasi persamaan adalah :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon \nabla V = 0 \quad (22)$$

dimana ε adalah konstanta positip. Persamaan ini tidak mempunyai arti fisik jika kondisi tunak belum tercapai.

THEORETICAL TREATMENT

1. Diskritisasi persamaan momentum

Diskritisasi persamaan momentum dengan skema Runge-Kutta adalah seperti berikut :

Kecepatan arah x (u)

$$u_{i,j}^M = u_{i,j}^M + b^{M+1} \Delta t H_{i,j}^M \quad (23)$$

$$H_{i,j}^M = -u_{i,j}^M ux_{i,j}^M - v_{i,j}^M uy_{i,j}^M - px_{i,j}^M + \frac{\text{Pr}}{Ra^{0.5}} (uxx_{i,j}^M + uyy_{i,j}^M) + a^M H_{i,j}^M \quad (24)$$

Kecepatan arah y (v)

$$v_{i,j}^{M+1} = v_{i,j}^M + b^{M+1} \Delta t H_{i,j}^M \quad (25)$$

$$H_{i,j}^M = -u_{i,j}^M vx_{i,j}^M - v_{i,j}^M vy_{i,j}^M - py_{i,j}^M + \frac{\text{Pr}}{Ra^{0.5}} (vxx_{i,j}^M + vyy_{i,j}^M) + \text{Pr} \theta_{i,j} + a^M H_{i,j}^M \quad (26)$$

Diskritasi turunan ruang dengan skema kompak orde-4 adalah seperti berikut :

Diskritisasi turunan pertama

$$\frac{1}{4} ux_{i-1,j}^M + ux_{i,j}^M + \frac{1}{4} ux_{i+1,j}^M = \frac{3}{4\Delta x} (u_{i+1,j}^M - u_{i-1,j}^M) \quad (27)$$

$$\frac{1}{4} uy_{i,j-1}^M + uy_{i,j}^M + \frac{1}{4} ux_{i,j+1}^M = \frac{3}{4\Delta y} (u_{i,j+1}^M - u_{i,j-1}^M) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} vx_{i-1,j}^M + vx_{i,j}^M + \frac{1}{4} vx_{i+1,j}^M = \frac{3}{4\Delta x} (v_{i+1,j}^M - v_{i-1,j}^M) \quad (29)$$

$$\frac{1}{4} vy_{i,j-1}^M + vy_{i,j}^M + \frac{1}{4} vx_{i,j+1}^M = \frac{3}{4\Delta y} (v_{i,j+1}^M - v_{i,j-1}^M) \quad (30)$$

$$\frac{1}{4} px_{i-1,j}^M + px_{i,j}^M + \frac{1}{4} px_{i+1,j}^M = \frac{3}{4\Delta x} (p_{i+1,j}^M - p_{i-1,j}^M) \quad (31)$$

$$\frac{1}{4} py_{i,j-1}^M + py_{i,j}^M + \frac{1}{4} px_{i,j+1}^M = \frac{3}{4\Delta y} (p_{i,j+1}^M - p_{i,j-1}^M) \quad (32)$$

Diskritisasi turunan kedua

$$\frac{1}{10} uxx_{i-1,j}^M + uxx_{i,j}^M + \frac{1}{10} uxx_{i+1,j}^M = \frac{6}{5(\Delta x)^2} (u_{i+1,j}^M - 2u_{i,j}^M + u_{i-1,j}^M) \quad (33)$$

$$\frac{1}{10} uyy_{i,j-1}^M + uyy_{i,j}^M + \frac{1}{10} uyy_{i,j+1}^M = \frac{6}{5(\Delta y)^2} (u_{i,j+1}^M - 2u_{i,j}^M + u_{i,j-1}^M) \quad (34)$$

$$\frac{1}{10} vxx_{i-1,j}^M + vxx_{i,j}^M + \frac{1}{10} vxx_{i+1,j}^M = \frac{6}{5(\Delta x)^2} (v_{i+1,j}^M - 2v_{i,j}^M + v_{i-1,j}^M) \quad (35)$$

$$\frac{1}{10} v y y_{i,j-1}^M + v y y_{i,j}^M + \frac{1}{10} v y y_{i,j+1}^M = \frac{6}{5(\Delta y)^2} \left(v_{i,j+1}^M - 2v_{i,j}^M + v_{i,j-1}^M \right) \quad (36)$$

2. Diskritisasi persamaan energi.

$$\theta_{i,j}^M = \theta_{i,j}^M + b^{M+1} \Delta t H_{i,j}^M \quad (37)$$

$$H_{i,j}^M = -u_{i,j}^M \theta x_{i,j}^M - v_{i,j}^M \theta y_{i,j}^M + \frac{1}{Ra^{0.5}} \left(\theta x x_{i,j}^M + \theta y y_{i,j}^M \right) + a^M H_{i,j}^M \quad (38)$$

Diskritisasi turunan ruang dengan skema kompak orde-4 adalah seperti berikut :

Diskritisasi turunan pertama

$$\frac{1}{4} \theta x_{i-1,j}^M + \theta x_{i,j}^M + \frac{1}{4} \theta x_{i+1,j}^M = \frac{3}{4 \Delta x} \left(\theta_{i+1,j}^M - \theta_{i-1,j}^M \right) \quad (39)$$

$$\frac{1}{4} \theta y_{i,j-1}^M + \theta y_{i,j}^M + \frac{1}{4} \theta y_{i,j+1}^M = \frac{3}{4 \Delta y} \left(\theta_{i,j+1}^M - \theta_{i,j-1}^M \right) \quad (40)$$

Diskritisasi turunan kedua

$$\frac{1}{10} \theta x x_{i-1,j}^M + \theta x x_{i,j}^M + \frac{1}{10} \theta x x_{i+1,j}^M = \frac{6}{5(\Delta x)^2} \left(\theta_{i+1,j}^M - 2\theta_{i,j}^M + \theta_{i-1,j}^M \right) \quad (41)$$

$$\frac{1}{10} \theta y y_{i,j-1}^M + \theta y y_{i,j}^M + \frac{1}{10} \theta y y_{i,j+1}^M = \frac{6}{5(\Delta y)^2} \left(\theta_{i,j+1}^M - 2\theta_{i,j}^M + \theta_{i,j-1}^M \right) \quad (42)$$

3. Diskritisasi metode kompresibilitas tiruan.

$$p_{i,j}^{M+1} = p_{i,j}^M + b^{M+1} \Delta t H_{i,j}^M \quad (43)$$

$$H_{i,j}^M = -u x_{i,j}^M - u y_{i,j}^M + a^M H_{i,j}^M \quad (44)$$

4. Diskritisasi syarat batas

Dalam penelitian ini kasus yang dibahas adalah konveksi alami dalam kotak 2-D dengan dinding bawah dan atas merupakan dinding adiabatis, dinding kiri mendapat pemanasan dan dinding kanan mendapat pendinginan. Pada seluruh dinding kecepatan bernalai nol sedangkan syarat batas tekanan dan temperatur adalah seperti berikut :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 & & -\theta = 0.5 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & \frac{\partial p}{\partial x} = 0 & \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & & \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 & & \end{array}}$$

Gambar 3.1 Domain dan syarat batas

a. Syarat batas kecepatan

Turunan pertama.

Untuk $i=1$ dan $i=nx$

$$u x_{1,j}^M = \frac{1}{12 \Delta x} \left(-3 u_{5,j}^M + 16 u_{4,j}^M - 36 u_{3,j}^M + 48 u_{2,j}^M - 25 u_{1,j}^M \right) \quad (45)$$

$$u x_{nx,j}^M = \frac{1}{12\Delta x} \left(3u_{nx-4,j}^M - 16u_{nx-3,j}^M + 36u_{nx-2,j}^M - 48u_{nx-1,j}^M - 25u_{nx,j}^M \right) \quad (46)$$

$$v x_{1,j}^M = \frac{1}{12 \Delta x} \left(-3 v_{5,j}^M + 16 v_{4,j}^M - 36 v_{3,j}^M + 48 v_{2,j}^M - 25 v_{1,j}^M \right) \quad (47)$$

$$v x_{nx,j}^M = \frac{1}{12 \Delta x} \left(3 v_{nx-4,j}^M - 16 v_{nx-3,j}^M + 36 v_{nx-2,j}^M - 48 v_{nx-1,j}^M - 25 v_{nx,j}^M \right) \quad (48)$$

Untuk $j=1$ dan $j=n$

$$uy_{i,1}^M = \frac{1}{12\Delta y} \left(-3u_{i,5}^M + 16u_{i,4}^M - 36u_{i,3}^M + 48u_{i,2}^M - 25u_{i,1}^M \right) \quad (49)$$

$$u y_{i,ny}^M = \frac{1}{12\Delta v} \left(3u_{i,ny-4}^M - 16u_{i,ny-3}^M + 36u_{i,ny-2}^M - 48u_{i,ny-1}^M - 25u_{i,ny}^M \right) \quad (50)$$

$$v y_{i,1}^M = \frac{1}{12 \Lambda_1} \left(-3 v_{i,5}^M + 16 v_{i,4}^M - 36 v_{i,3}^M + 48 v_{i,2}^M - 25 v_{i,1}^M \right) \quad (51)$$

$$v y_{i,ny}^M = \frac{1}{12 \Delta x} \left(3 v_{i,ny-4}^M - 16 v_{i,ny-3}^M + 36 v_{i,ny-2}^M - 48 v_{i,ny-1}^M - 25 v_{i,ny}^M \right) \quad (52)$$

Turunan kedua.

Untuk $i=1$ dan $i=nx$

$$uxx_{1,j}^M + 1 luxx_{2,j}^M = \frac{1}{(\Delta x)^2} (13u_{1,j}^M - 27u_{2,j}^M + 15u_{3,j}^M - u_{4,j}^M) \quad (53)$$

$$uxx_{nx,j}^M + 1 luxx_{nx-1,j}^M = \frac{1}{(\Delta x)^2} (13u_{nx,j}^M - 27u_{nx-1,j}^M + 15u_{nx-2,j}^M - u_{nx-3,j}^M) \quad (54)$$

$$vxx_{1,j}^M + 1 lvyx_{2,j}^M = \frac{1}{(\Delta x)^2} (13v_{1,j}^M - 27v_{2,j}^M + 15v_{3,j}^M - v_{4,j}^M) \quad (55)$$

$$vxx_{nx,j}^M + 1 lvyx_{nx-1,j}^M = \frac{1}{(\Delta x)^2} (13v_{nx,j}^M - 27v_{nx-1,j}^M + 15v_{nx-2,j}^M - v_{nx-3,j}^M) \quad (56)$$

Untuk $j=1$ dan $j=ny$

$$uyy_{i,1}^M + 1 luyy_{i,2}^M = \frac{1}{(\Delta y)^2} (13u_{i,1}^M - 27u_{i,2}^M + 15u_{i,3}^M - u_{i,4}^M) \quad (57)$$

$$uyy_{i,ny}^M + 1 luyy_{i,ny-1}^M = \frac{1}{(\Delta y)^2} (13u_{i,ny}^M - 27u_{i,ny-1}^M + 15u_{i,ny-2}^M - u_{i,ny-3}^M) \quad (58)$$

$$vyy_{i,1}^M + 1 lvyy_{i,2}^M = \frac{1}{(\Delta y)^2} (13v_{i,1}^M - 27v_{i,2}^M + 15v_{i,3}^M - v_{i,4}^M) \quad (59)$$

$$vyy_{i,ny}^M + 1 lvyy_{i,ny-1}^M = \frac{1}{(\Delta y)^2} (13v_{i,ny}^M - 27v_{i,ny-1}^M + 15v_{i,ny-2}^M - v_{i,ny-3}^M) \quad (60)$$

b. Syarat batas tekanan

Untuk $i=1$ dan $i=nx$

$$px_{1,j}^M = 0 \quad (61)$$

$$px_{nx,j}^M = 0 \quad (62)$$

Untuk $j=1$ dan $j=ny$

$$py_{i,1}^M = 0 \quad (63)$$

$$uy_{i,ny}^M = 0 \quad (64)$$

c. Syarat batas temperatur

Turunan pertama

Untuk $i=1$ dan $i=nx$

$$\theta x_{1,j}^M = \frac{1}{12\Delta x} (-3\theta_{5,j}^M + 16\theta_{4,j}^M - 36\theta_{3,j}^M + 48\theta_{2,j}^M - 25\theta_{1,j}^M) \quad (65)$$

$$\partial x_{nx,j}^M = \frac{1}{12\Delta x} \left(3\theta_{nx-4,j}^M - 16\theta_{nx-3,j}^M + 36\theta_{nx-2,j}^M - 48\theta_{nx-1,j}^M - 25\theta_{nx,j}^M \right) \quad (66)$$

Untuk $j=1$ dan $j=ny$

$$\theta y_{i,1}^M = 0 \quad (67)$$

$$\theta y_{i,ny}^M = 0 \quad (68)$$

Turunan kedua

Untuk $i=1$ dan $i=nx$

$$\partial xx_{1,j}^M + 11\partial xx_{2,j}^M = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left(13\theta_{1,j}^M - 27\theta_{2,j}^M + 15\theta_{3,j}^M - \theta_{4,j}^M \right) \quad (69)$$

$$\partial xx_{nx,j}^M + 11\partial xx_{nx-1,j}^M = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left(13\theta_{nx,j}^M - 27\theta_{nx-1,j}^M + 15\theta_{nx-2,j}^M - \theta_{nx-3,j}^M \right) \quad (70)$$

Untuk $j=1$ dan $j=ny$

$$\partial yy_{i,1}^M + 11\partial yy_{i,2}^M = \frac{1}{(\Delta y)^2} \left(13\theta_{i,1}^M - 27\theta_{i,2}^M + 15\theta_{i,3}^M - \theta_{i,4}^M \right) \quad (71)$$

$$\partial yy_{i,ny}^M + 11\partial yy_{i,ny-1}^M = \frac{1}{(\Delta y)^2} \left(13\theta_{i,ny}^M - 27\theta_{i,ny-1}^M + 15\theta_{i,ny-2}^M - \theta_{i,ny-3}^M \right) \quad (72)$$

Bilangan Nusselt pada dinding ($x=0$) dan tengah ($x=0.5$) dihitung dengan persamaan (Le Quere, 1990):

$$Nu = \int_0^1 \left(Ra^{0.5} u \theta - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dy \quad (73)$$

Sedangkan Bilangan Nusselt lokal pada dinding dihitung dengan persamaan:

$$Nu = -\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (74)$$

Stream Function dihitung dengan persamaan :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (75)$$

dengan syarat batas di dinding adalah $\varphi=0$.

Vortisitas dihitung dengan persamaan

$$\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (76)$$

Residu dihitung dengan persamaan :

$$\text{Residu} = \frac{\sum \left| \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right|}{\sum n} \quad (77)$$

n=jumlah grid

HASIL DAN PEMBAHASAN

Perhitungan dilakukan dengan PC Pentium III kecepatan 550 MHz dengan RAM 64 MB. Program ditulis dalam Bahasa Fortran dengan perangkat lunak Lahey Fortran. Untuk visualisasi hasil menggunakan perangkat lunak Matlab 6. Ukuran grid adalah 101x101 untuk $Ra=10^6$, 151x151 untuk $Ra=10^7$ dan 201x201 untuk $Ra=10^8$ dan $Ra=5 \times 10^8$ dengan grid seragam.

Gambar 4.4 menunjukkan peningkatan Ra menyebabkan kecepatan konvergensi berkurang. Hal ini disebabkan peningkatan Ra membuat suku difusi berkurang pengaruhnya terhadap perhitungan. Suku difusi mempunyai sifat sebagai peredam, sehingga perhitungan stabil. Dengan melemahnya suku difusi maka suku adveksi menguat dan mengantikan dominasi suku difusi. Penguatan suku adveksi membuat sistem persamaan atur cenderung bersifat hiperbolik. Residu berosilasi tajam dan sulit untuk direndam. Untuk nilai Ra lebih dari 5×10^8 perhitungan sangat sulit untuk mencapai konvergensi.

Residu dihitung dihitung dengan persamaan :

$$\text{Residu} = \frac{\sum \left| \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right|}{\sum n} \quad (73)$$

n = jumlah grid.

Untuk mengetahui akurasi perhitungan Bilangan Nusselt (Nu) pada penelitian ini, hasil perhitungan untuk berbagai nilai Bilangan Rayleigh dibandingkan dengan korelasi dari Catton (Incropera & DeWitt, 1990) yaitu :

$$\overline{Nu} = 0.18 \left(\frac{Pr}{0.2 + Pr} Ra \right)^{0.29} \quad (74)$$

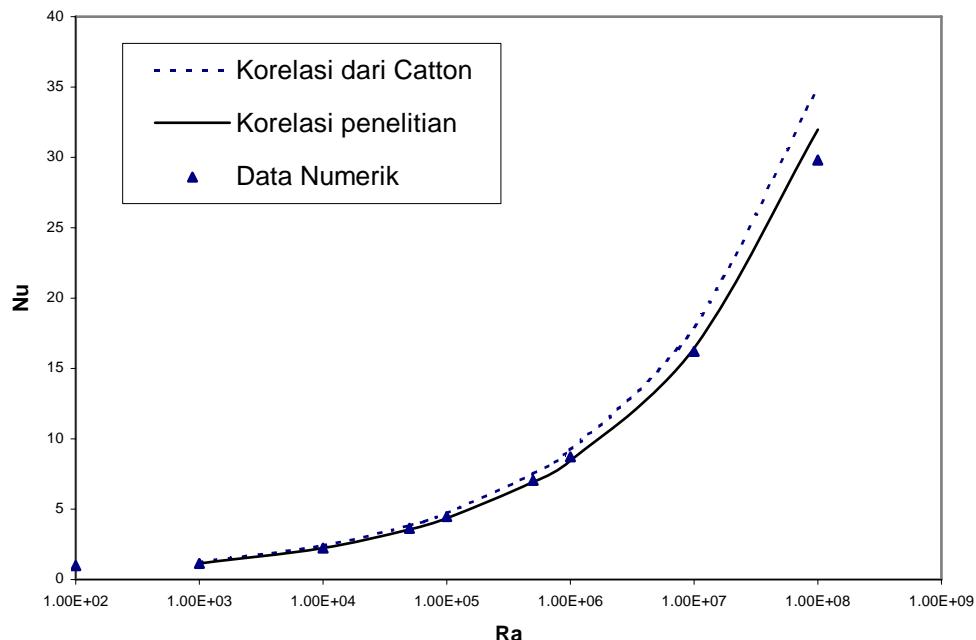
Pada penelitian ini Nu rata-rata untuk $x=0$ dan $x=0.5$ dihitung dengan persamaan :

$$Nu = \int_0^1 \left(Ra^{0.5} u \theta - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dy \quad (75)$$

Korelasi antara Nu terhadap Ra ditunjukkan dengan persamaan :

$$Nu = 0.1562 Ra^{0.28884} \quad (76)$$

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa peningkatan nilai Ra menyebabkan nilai Nu rata-rata meningkat. Perbandingan dengan korelasi Catton menunjukkan hasil yang cukup dekat.



Gamb

ar 4.1 Perbandingan nilai Nu pada $x=0$ dengan korelasi dari Catton

Bilangan Nusselt adalah parameter yang menunjukkan perbandingan antara koefisien perpindahan panas konveksi dari koefisien perpindahan panas konduksi. Untuk nilai Ra yang sangat rendah ($Ra < 1000$) aliran konveksi sangat lemah sehingga perpindahan panas murni disebabkan oleh konduksi. Hal ini dapat dilihat pada gambar 4.1 pada Ra rendah nilai Nu rata-rata adalah 1.

Bilangan Nusselt lokal dihitung dengan persamaan :

$$Nu = - \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (77)$$

Pengaruh Ra terhadap Nu lokal dapat dilihat pada gambar 4.5. Menurut gambar 4.5 dapat diketahui bahwa peningkatan nilai Ra juga menyebabkan nilai Nu lokal meningkat. Nu lokal tertinggi terletak pada bagian bawah ($y=0$) untuk dinding $x=0$, semakin ke atas Nu lokal berkurang. Hal ini menunjukkan bahwa semakin ke atas gradien temperatur berkurang. Sedangkan pada dinding $x=1$, Nu lokal tertinggi terjadi pada bagian atas ($y=1$) dan semakin ke bawah nilainya berkurang.

Tinjauan secara fisis akan diberikan pada bagian di bawah ini. Gambar 4.2 dan 4.3 menampilkan vektor kecepatan untuk $Ra 10^6$ dan 10^7 . Di sini terlihat bahwa kecepatan fluida pada dinding kiri dan kanan relatif cepat dari pada bagian tengah. Pada dinding kiri fluida mendapat pemanasan sehingga densitas fluida mengecil. Penyusutan densitas pada dinding kiri menyebabkan terjadinya gaya apung sehingga fluida bergerak ke atas. Aliran fluida setelah mencapai dinding atas bergerak turun dan selanjutnya membelok ke kanan dan mengalami pendinginan. Gerakan fluida turun setelah mencapai dinding atas disebabkan oleh pengaruh inersia. Hal ini terjadi karena nilai Bilangan Prandtl untuk udara adalah $Pr < 1$ sehingga keseimbangan persamaan aliran dipengaruhi oleh inersia. Untuk nilai $Pr > 1$ maka pengaruh inersia akan semakin berkurang sehingga keseimbangan persamaan aliran dipengaruhi oleh *friction* dan *buoyancy*. Setelah mencapai dinding kanan fluida membelok ke bawah, karena dinding kanan temperaturnya lebih rendah fluida mengalami pendinginan sehingga densitasnya meningkat, dengan demikian kecepatan aliran bertambah karena pengaruh gaya gravitasi.

Setelah mencapai dinding bawah aliran fluida bergerak ke atas karena pengaruh inersia kemudian berbelok ke kiri dan mengalami pemanasan pada dinding kiri.

Pembelokan aliran fluida di dekat dinding $x=0$ bagian atas menyebabkan gradien temperatur berkurang karena aliran fluida juga mengangkut panas dari dinding $x=0$. Hal ini juga bisa diamati dari distribusi Bilangan Nusselt lokal di dinding $x=0$, Nu lokal semakin ke atas semakin rendah. Sedangkan peristiwa yang terjadi didekat dinding $x=1$ adalah kebalikan dari peristiwa aliran di dekat dinding $x=0$.

Pengaruh Bilangan Rayleigh terhadap vektor kecepatan adalah peningkatan Ra menyebabkan lapis batas hidrodinamis di dinding menipis. Ini berarti gradien kecepatan di dinding meningkat dan gaya gesek juga meningkat. Dari gambar 4.6 terlihat bahwa vortisitas di dekat dinding kiri dan kanan cukup besar. Hal ini karena gaya gesek di dinding kiri dan kanan relatif lebih besar. Gambar 4.8 menunjukkan peningkatan Ra juga membuat lapis batas thermal di dinding menipis sehingga gradien temperatur di dinding meningkat. Distribusi temperatur yang relatif panas di bagian kiri atas semakin condong ke kanan dan distribusi temperatur yang relatif dingin di bagian kiri bawah semakin condong ke kiri, hal ini karena kecepatan fluida yang membawa panas juga meningkat seiring peningkatan Ra .

Dari gambar 4.9 terlihat bahwa garis-garis isobar kelihatan mulus dengan demikian pemakaian skema kompak orde-4 seperti yang dijelaskan di atas bisa menghilangkan osilasi numerik pada tekanan.

Gambar 4.10 sampai 4.11 menunjukkan kurva isothermal dan *stream function* untuk berbagai domain berbentuk persegi panjang dan non persegi panjang (*non rectangular*). Perhitungan dilakukan pada $Ra=10^7$ dengan $\Delta x=1/200$ dan $\Delta y=1/200$. Di sini terlihat aliran bersirkulasi melalui sepanjang dinding batas dari domain.

Gambar 4.12 menunjukkan visualisasi hasil untuk kasus dengan variabel berdimensi. Deskripsi dari kasus ini adalah dinding kiri dijaga pada 20°C dan dinding kanan 0°C , kotak berisi udara kering dengan sifat-sifat sebagai berikut(Bejan, 1984) :

Tekanan	$P = 1 \text{ atm}$
Temperatur	$T = 10^\circ\text{C}$
Densitas	$\rho = 0.001274 \text{ g/cm}^3$
Viskositas kinematik	$\nu = 0.141 \text{ cm}^2/\text{s}$
Difusivitas thermal	$\alpha = 0.196 \text{ cm}^2/\text{s}$
Koefisien ekspansi thermal	$\beta = 0.0035214 \text{ K}^{-1}$
Bilangan Rayleigh	$Ra = 2 \times 10^7$

Kotak dengan dimensi $20 \times 20 \text{ cm}$ dan perhitungan dilakukan dengan jumlah grid 151×151 .

Hasil perhitungan dan perbandingan dengan hasil peneliti lainnya disajikan dalam tabel 4.1, 4.2 dan 4.3. Kolom terakhir tabel menunjukkan perbandingan antara hasil penelitian ini dengan hasil penelitian dari Le Quere.

Tabel.4.1 Hasil Perhitungan dan Perbandingan untuk $Ra=10^6$

	Sekarang	Le Quere	De Vahl Davies	Beda (%)
ϕ_{middle}	0.0164552	0.016384	0.01632	0.43
ϕ_{max}	0.0169117	0.016811	0.01675	0.60
X	0.150000	0.1500	0.151	0.00
Y	0.550000	0.5470	0.547	0.55
$u_{\text{max}(1/2,y)}$	0.0649050	0.064834	0.06463	0.11
Y	0.850000	0.850	0.850	0.00
$v_{\text{max}(x,1/2)}$	0.220236	0.2206	0.21936	0.17
X	0.040	0.038	0.0379	5.26
Nu_{wall}	8.73394	8.8252	8.817	1.03
Nu_{middle}	8.82299	8.8244	8.779	0.02
Nu_{max}	17.1575	17.5343	17.925	2.15
Y	0.030	0.039	0.0378	23.08
Nu_{min}	0.98427	0.97948	0.989	0.49
Y	1.0	1.0	1.0	0.00

Tabel 4.2 Hasil Perhitungan dan Perbandingan untuk $Ra=10^7$

	sekarang	Le Quere	Lauriat & Altimir	Kelson	Beda (%)
ϕ_{middle}	0.00936819	0.00928496	-	0.9275	0.90
ϕ_{max}	0.00964076	0.00953872	-	0.9528	1.07
X	0.0866667	0.086	-	0.086	0.78
Y	0.553333	0.556	-	0.556	0.48
$u_{\text{max}(1/2,y)}$	0.0473129	0.046986	0.0468	0.04687	0.70
Y	0.88	0.879	0.874	0.880	0.11
$v_{\text{max}(x,1/2)}$	0.221048	0.21118	0.2287	0.2209	4.67
X	0.02	0.021	0.021	0.0213	4.76
Nu_{wall}	16.2068	16.523	16.56	16.5	1.91
Nu_{middle}	16.5638	16.523	16.46	16.5	0.25
Nu_{max}	40.3192	39.3947	40.15	-	2.35
Y	0.00667	0.018	0.016	-	62.94
Nu_{min}	1.37516	1.36635	1.376	-	0.64
Y	1.0	1.0	1.0	-	0.00

Tabel 4.3 Hasil Perhitungan dan Perbandingan untuk $Ra=10^8$

	Sekarang	Le Quere	Kelson	Beda (%)
ϕ_{middle}	0.00541453	0.005232	0.005203	3.49
ϕ_{max}	0.00552848	0.005385	0.005357	2.66
X	0.05	0.048	0.0484	4.17
Y	0.550	0.553	0.551	0.54
$u_{\text{max}(1/2,y)}$	0.033394	0.03219	0.03116	3.74
Y	0.9300	0.928	0.926	0.22
$v_{\text{max}(x,1/2)}$	0.2196	0.2222	0.2209	1.17
X	0.0100	0.012	0.012	16.67
Nu_{wall}	29.811	30.225	30.0	1.37
Nu_{middle}	30.9465	30.225	30.2	2.39

Stream Function dihitung dengan persamaan :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (78)$$

dengan syarat batas di dinding adalah $\phi=0$.

Vortisitas dihitung dengan persamaan

$$\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (79)$$

SUMMARY AND CONCLUSIONS

Kesimpulan yang dapat ditarik dari penelitian ini adalah :

1. Hasil penelitian memiliki kedekatan yang baik dengan hasil penelitian dari Le Quere. Perbedaan hasil penelitian dengan penelitian dari Le Quere kurang dari 5%.
2. Hasil perhitungan memiliki konvergensi yang baik sampai pada Bilangan Rayleigh 5×10^8 .
3. Dengan skema kompak orde-4 osilasi numerik pada tekanan dapat dihilangkan.
4. Hubungan antara Bilangan Nusselt (Nu) terhadap Bilangan Rayleigh (Ra) ditunjukkan dengan korelasi $Nu=0.1562Ra^{0.28884}$. Korelasi tersebut berlaku untuk $10^3 \leq Ra \leq 10^8$.

Conclusions:

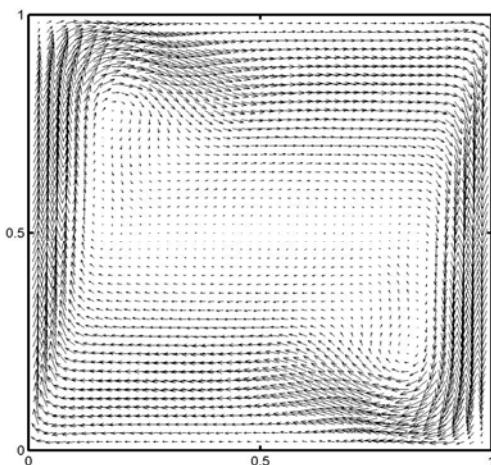
Skema kompak orde-tinggi selain memiliki akurasi yang baik mempunyai bentuk yang sederhana dan mudah diaplikasikan. Bagi para pembaca yang berminat penelitian ini masih terbuka kemungkinan untuk penyelesaian kasus 3-D atau penyelesaian kasus 2-D dengan menggunakan grid yang tidak seragam.

ACKNOWLEDGMENT

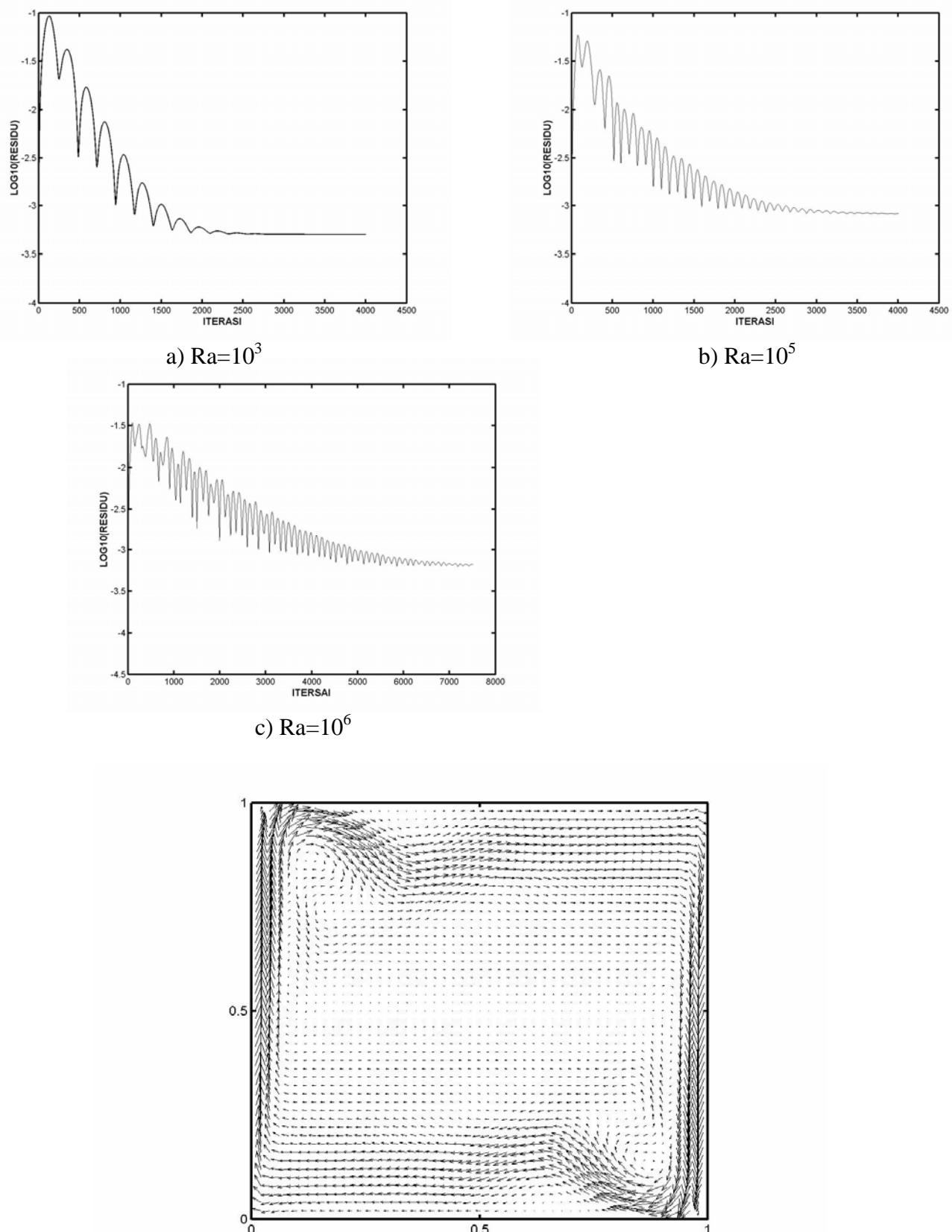
The outhors wish to thank Mr. Enardi Widodo for his helpful assistance.

REFERENCES

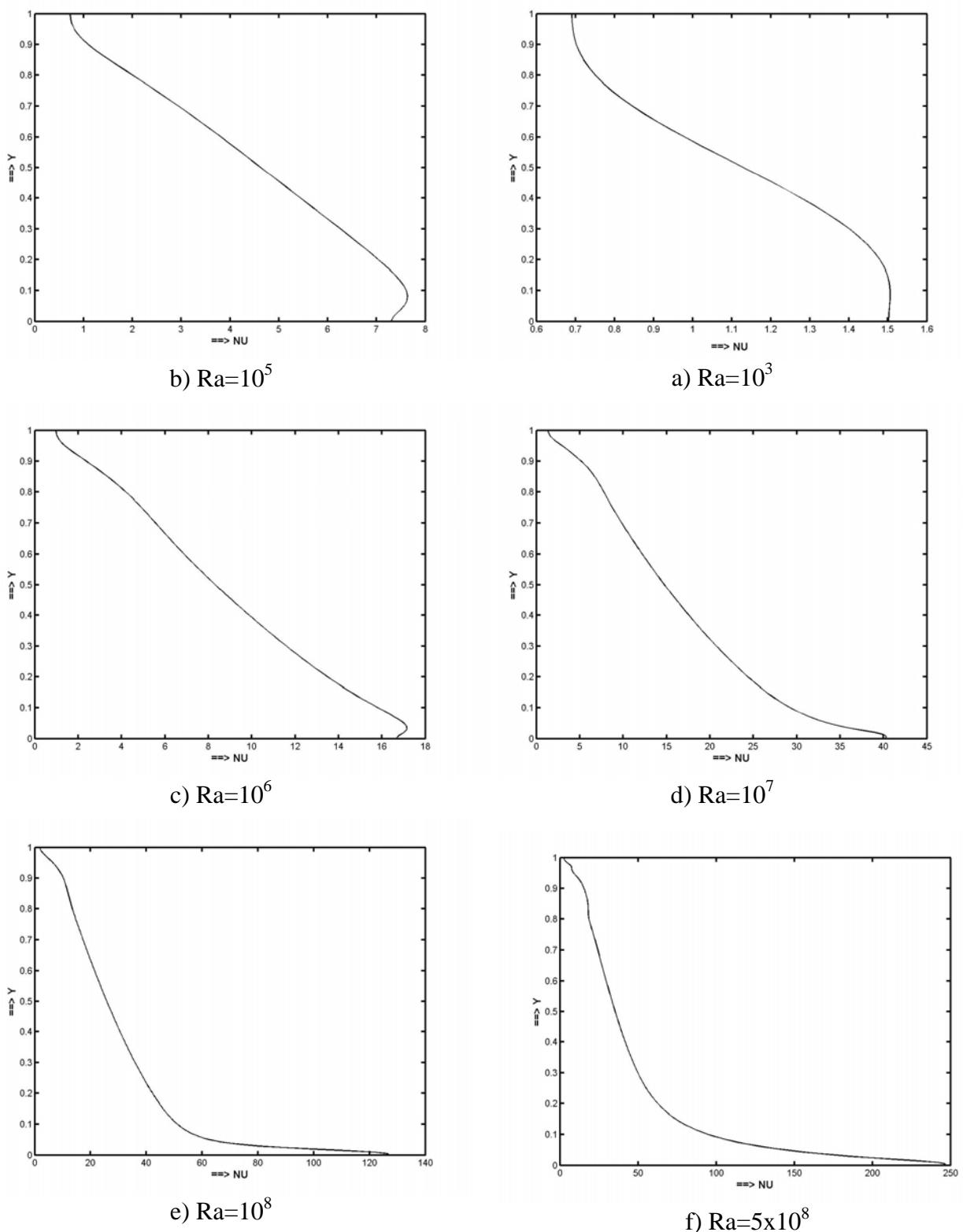
- Armfield, S. W., 1990, *Finite Difference Solution Of The Navier-Stokes Equations on Staggered and Non-Staggered Grids*, International Journal of Computer & Fluids, Vol. 20, No. 1.
- Babu, V. and Korpela, A.S., 1992, *Numerical Solution of The Incompressible, Three-Dimensional Navier-Stokes Equations*, International Journal of Computer & Fluids, Vol. 23, No. 5.
- Bejan, A., 1984, *Convection Heat Transfer*, John Wiley & Sons, New York.
- Hirsch, C. 1990, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. I & II, John Wiley & Sons, Chichester, England.
- Hu, F.Q., Hussaini, M.Y. and Manthey, J., 1996, *Low-Dissipation and Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics*, ICASE Report 94-102, and Journal of Computational Physics. Vol 124.1, pp.177-191, 1996
- Incropera, F.P. and DeWitt, D.P. , 1990, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, New York
- Lemos, C.M., 1994, *FDFLOW: A FORTRAN-77 Solver for 2-D Incompressible Fluid Flow*, Computers & Geosciences, Vol.20, No.3, pp.265-291.
- Patankar, S. V. 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill Book Company
- Pulicani, J.P. and Ouazzani, J., 1991, *A Fourier-Chebyshev Pseudospectral Method for solving Steady 3-D Navier Stokes and Heat equations in Cylindrical Cavities*, International Journal of Computer & Fluids, Vol. 20, No. 2.
- Quere, P. Le, 1990, *Accurate Solutions to The Square Thermally Driven Cavity at High Rayleigh Number*, International Journal of Computer & Fluids, Vol. 20, No. 1.
- Tang, T. ,1994, *A Graduate Course on Spectral Methods*, Departement of Mathematics and Statistics Simon Fraser University, Burnaby, British Columbia Canada V5A 1S6.
- Wilson, Robert V., and Demuren, Ayodeji O., 1998, *Higher-Order Compact Schemes for Numerical Simulation of Incompressible Flows*, ICASE Report No. 98-13, NASA Langley Research Center, Hampton.



Gambar 4.1
Vektor kecepatan untuk $Ra=10^6$



Gambar 4.2
Vektor kecepatan untuk $\text{Ra} = 10^7$



Gambar 4.5 Distribusi Nu pada $x= 0$ untuk berbagai nilai $\text{Ra}=10^3, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$ dan 5×10^8 .