

Desain Skill Manipulator Robot Empat DOF dengan Metode Jacobian

Rafiuddin Syam, Nasaruddin Salam, dan Keigo Watanabe

Program Studi Teknik Mesin Jurusan Mesin, Universitas Hasanuddin,

Jl. Perintis Kemerdekaan km. 10, Tamalanrea Makassar – 90245

E-mail : rafiuddin@internux.web.id

*Advanced Systems Control Engineering Dept, Saga University, Japan, 840-8502

Abstrak

Pada makalah ini penulis menguraikan simulasi dan desain robot lengan untuk industri. Salah satu aplikasi robot lengan untuk industri yang sering dijumpai adalah welding, drilling, skill painting kasus dan lain-lain. Ketidaksamaan hasil operasi akibat kualitas operator yang berbeda menimbulkan tidak seragamnya produk yang dihasilkan serta tidak menjamin kontinuitas produk. Untuk itu penulis mendesain robot lengan atau manipulator robot untuk kelas skill painting kasus. Pada penelitian ini penulis menentukan persamaan kinematika dari robot lengan 4 DOF dengan metode Jacobian. Untuk penentuan parameter robot lengan, penulis menggunakan metode Denavit-Hartenberg, dengan jumlah 4 batang penghubung. Analisis kecepatan tiap link dapat diperoleh dengan metode ini. Untuk mensimpulkan penulis menggunakan animasi 3Dmax dengan contoh pengecatan huruf A. Hasil desain robot lengan 4 DOF adalah luaran dari penelitian ini.

Kata kunci: robot manipulator, Kinematika robot lengan, trajectory

Pendahuluan

Konvensional robot hanya dapat bergerak sesuai dengan perintah operator atau sesuai yang telah diprogramkan, misalnya mesin bubut CNC, mesin frais CNC dan lain-lain. Robot ini tidak memiliki kepekaan dalam melakukan operasi di industri, misalnya pengelasan, pengecatan, skrap dan sebagainya. Dalam penelitian ini penulis mendesain robot yang memiliki skill untuk beberapa operasi khusus di industri.

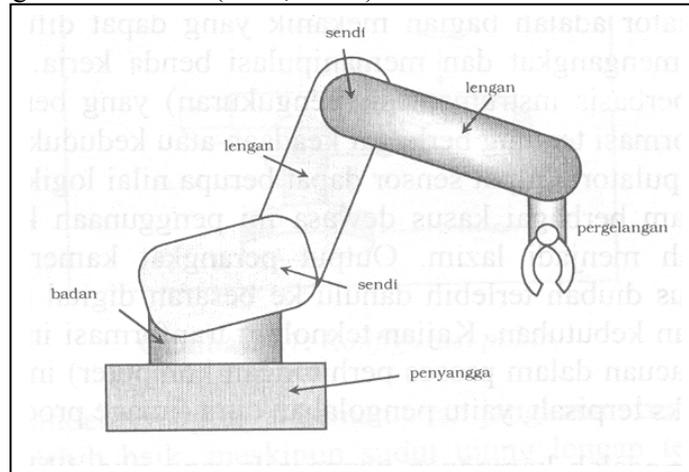
Kata robot berasal dari bahasa Czech, *robot*, yang berarti pekerja, mulai menjadi populer ketika seorang penulis berbangsa Czech (Ceko), Karl Capek, membuat pertunjukan dari lakon komedi yang dituliskan pada tahun 1921 yang berjudul RUR (Rossum's Universal Robot), ia bercerita tentang mesin yang menyerupai manusia, tapi mampu bekerja terus-menerus tanpa lelah. Gaung popularitas istilah robot ini kemudian memperoleh sambutan dengan di perkenalkannya robot Jerman dalam film metropolis tahun 1926 yang sempat dipamerkan dalam New York World's Fair 1939. Film ini mengisahkan tentang robot berjalan mirip manusia beserta hewan peliharaannya. Istilah robot ini makin populer dengan lahirnya robot C3PO dalam film Star Wars pertama Pada tahun 1977.

Pada awalnya, aplikasi robot hampir tak dapat dipisahkan dengan industri sehingga muncul istilah industrial robot dan robot manipulator. Definisi yang populer ketika itu, robot industri adalah suatu robot lengan (*robot arm*) yang diciptakan untuk berbagai keperluan dalam meningkatkan produksi, memiliki bentuk-bentuk lengan kaku yang terhubung secara seri dan memiliki sendi yang dapat bergerak berputar (rotasi) atau memanjang/memendek (translasi atau prismatic). Satu sisi lengan yang disebut sebagai pangkal ditanam pada bidang atau meja yang statis (tidak bergerak), sedangkan sisi yang lain yang disebut sebagai ujung (*end of effector*) dapat dimuati dengan tool tertentu yang sesuai dengan tugas robot. Dalam dunia mekanikal, manipulator ini memiliki dua bagian, yaitu tangan atau lengan (*arm*) dan pergelangan (*wrist*). Pada pergelangan ini dapat diinstal berbagai tool. Begitu diminatinya penggunaan manipulator dalam industri ini, menyebabkan banyak perusahaan besar di dunia menjadikan robot industri sebagai unggulan.

Dewasa ini mungkin definisi robot industri itu sudah tidak sesuai lagi karena teknologi mobile robot juga sudah dipakai meluas sejak awal 80-an. Seiring itu pula kemudian muncul istilah robot humanoid (konstruksi mirip manusia), animaloid (mirip binatang), dan sebagainya. Bahkan kini dalam industri spesifik seperti industri perfilman, industri angkasa luar dan industri pertahanan atau mesin perang. Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mendesain robot lengan, menentukan persamaan kinematika pergerakan robot, menentukan trajektori robot lengan.

SEKILAS ROBOT LENGAN

Robot adalah sebuah sistem mekanik yang mana mempunyai gerakan yang fleksibel seperti makhluk hidup, atau kombinasi dari beberapa gerakan dengan fungsi intelegensi, dan melakukan tanggapan terhadap apa yang diinginkan manusia. (Peter, 1985)



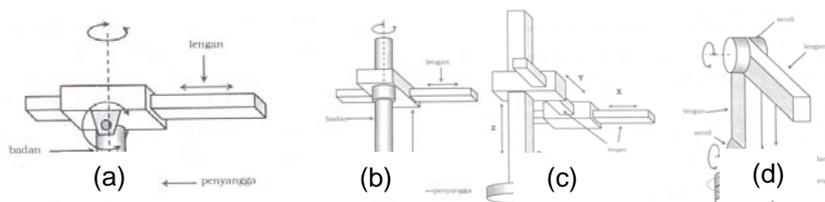
Gambar 1. Anatomi robot industri
Sumber : Endra (2006)

Pada Gambar 1 di atas memperlihatkan anatomi robot industri yang Komponen utamanya terdiri dari empat bagian, yaitu:

1. Manipulator; bagian mekanik yang dapat difungsikan untuk memindah, mengangkat dan memanipulasi benda kerja.
2. Sensor; komponen berbasis instrumentasi (pengukuran) yang berfungsi sebagai pemberi informasi tentang berbagai keadaan atau kedudukan dari bagian-bagian manipulator.
3. Aktuator; omponen penggerak yang jika dilihat dari prinsip penghasil gerakanya dapat dibagi menjadi 3 bagian, yaitu penggerak berbasis motor listrik (motor DC dan motor AC),
4. Kontroler; rangkaian elektronik berbasis mikroprosesor yang berfungsi sebagai pengatur seluruh komponen dalam membentuk fungsi kerja. (Endra, 2006)

B. Konfigurasi Manipulator

Konfigurasi manipulator dapat dibagi dalam 4 kelompok yaitu:



Gambar 2. Konfigurasi Polar, Silinder, Cartesian dan Sendi lengan

Pada Gambar 2a terlihat konfigurasi polar dimana badan dapat berputar ke kiri atau kanan. Sendi pada badan dapat mengangkat atau menurunkan pangkal lengan secara polar. Lengan ujung dapat digerakkan maju-mundur secara translasi.

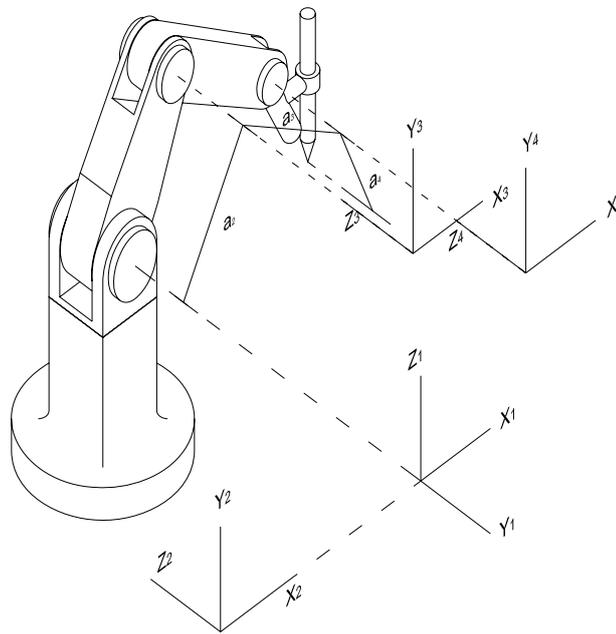
Konfigurasi silinder mempunyai kemampuan jangkauan berbentuk ruang silinder yang lebih baik, meskipun sudut ujung lengan terhadap garis penyangga tetap. Konfigurasi ini banyak diadopsi untuk sistem *gantry* atau *crane* karena strukturnya yang kokoh untuk tugas mengangkat beban seperti terlihat pada Gambar 2b.

Pada Gambar 2c memperlihatkan manipulator berkonfigurasi cartesian dimana secara relatif adalah yang paling kokoh untuk tugas mengangkat beban yang berat. Struktur ini banyak dipakai secara permanen pada instalasi pabrik baik untuk mengangkat dan memindah barang-barang produksi maupun untuk mengangkat peralatan-peralatan berat pabrik ketika melakukan kegiatan instalasi.

Konfigurasi ini yang paling populer untuk melaksanakan fungsi layaknya pekerja pabrik seperti mengangkat barang, mengelas, memasang komponen mur dan baut, dan sebagainya. Struktur lengan-sendi cocok digunakan untuk menjangkau daerah kerja yang sempit dengan sudut jangkauan yang beragam.

PERHITUNGAN DAN TRAJEKTORI ROBOT LENGAN

Untuk menghitung manipulator, menghitung kecepatan rotasi dan kecepatan linear dari *tool frame* relatif terhadap *base frame* dimana dihitung *tool frame* ${}^5\omega_5$ dan 5v_5 dimana sebelum kita menghitung maka kita tentukan dulu parameter-parameter yang akan digunakan berdasarkan gambar berikut:



Gambar 16. Model Robot Lengan

A. Kinematika Manipulator

Tabel 2. Parameter

I	$\alpha_i - 1$	$a_i - 1$	d_i	Θ_i
1	0	0	0	Θ_1
2	-90	0	0	Θ_2
3	0	A_2	0	Θ_3
4	0	A_3	0	Θ_4
5	0	A_4	0	0

Dengan menggunakan metode Denavit-Hartenberg (D-H)

Prinsip dasar representasi D-H adalah melakukan transformasi koordinat antara dua link yang berdekatan. Hasilnya adalah suatu matriks (4x4) yang menyatakan sistem koordinat dari suatu link dengan link yang terhubung pada pangkalnya (link sebelumnya). Dalam konfigurasi serial, koordinat (ujung) link-1 dihitung berdasarkan sendi -0 atau sendi pada sudut tubuh robot. Sistem koordinat link-2 dihitung berdasarkan posisi sendi link-1 yang berada diujung link-1 dengan mengasumsikan link-1 adalah basis gerakan link-2. demikian seterusnya, link-3 dihiutng berdasarkan link-2, sehingga link ke

(n) dihitung berdasarkan link ke(n-1). Dengan cara ini maka tiap langkah perhitungan atau transformasi hanya melibatkan sistem 1DOF saja. Terakhir, posisi koordinat tangan atau posisi ujung robot (end-effector) akan dapat diketahui.

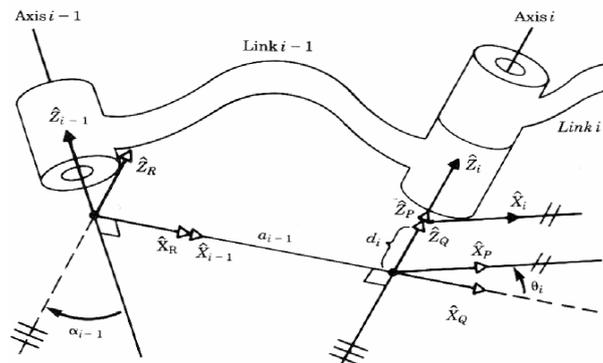
Pada gambar diatas mengilustrasikan tiga buah lengan yang terhubung secara serial. Konfigurasi hubungan dapat berupa sendi rotasi ataupun sendi translasi. Dalam hal ini, representasi D-H menggunakan 4 buah parameter, yaitu θ, α, d, a . untuk robot dengan n-DOF maka 4 parameter ini ditentukan hingga yang ke-n. penjelasannya,

θ_n adalah sudut putaran pada sumbu z_{n-1} , α_n adalah sudut putaran pada sumbu X_n ,
 d_n adalah translasi pada sumbu z_{n-1} dan a_n adalah translasi pada sumbu X_n .

Dari gambar dapat didefinisikan suatu matriks transformasi homogen yang mengandung unsur rotasi dan translasi, yaitu

$$A = R(z, \theta_n) \text{Ttran} (0,0,d_n) \text{Ttran} (a,0,0) R(x, \alpha_n) \quad (9)$$

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n & 0 & a_n \\ \sin \theta_n \cos \alpha_n & \cos \theta_n \cos \alpha_n & -\sin \alpha_n & -\sin \alpha_n d_n \\ \sin \theta_n \sin \alpha_n & \cos \theta_n \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & \cos \alpha_n d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$



Gambar 17. Location of Intermediate frames {P}, {Q}, dan {R}.
 Sumber: John Craig (1984)

Vektor dalam frame (i) adalah dinyatakan dalam frame (i-1) sebagai berikut :

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}R {}^R Q {}^Q P {}^P i T {}^i P$$

Atau

$${}^{i-1}P = {}^{i-1}T {}^i P$$

Dimana

$${}^{i-1}T = {}^{i-1}R {}^R Q {}^Q P {}^P i T$$

Jadi kita dapat menuliskan :

$${}^{i-1}T = R_x(\alpha_{i-1}) D_x(a_{i-1}) R_z(\theta_i) D_z(d_i)$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} d_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari Tabel 2 kita dapat menghitung *homogeneous transform matrixs* untuk setiap *link*.

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & -\cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & a_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3_4T = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & a_3 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kecepatan dari link ke link

Kita akan menghitung kecepatan linier dan anguler pada link robot. Manipulator sebagai benda kaku setiap pergerakannya relatif terhadap yang lainnya. Karena struktur ini kita dapat menghitung kecepatan setiap link yang dimulai dari *base frame*.

Kecepatan rotasi mungkin dijumlahkan ketika kedua-duanya vektor ω dituliskan saling berhubung dengan frame yang sama. Oleh karena itu kecepatan anguler link (i+1) sama seperti link (i) ditambahkan dengan komponen baru sebab kecepatan rotasi pada joint (i+1).

$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}^iR_{i+1} \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \text{ Dimana:}$$

$$\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix}$$

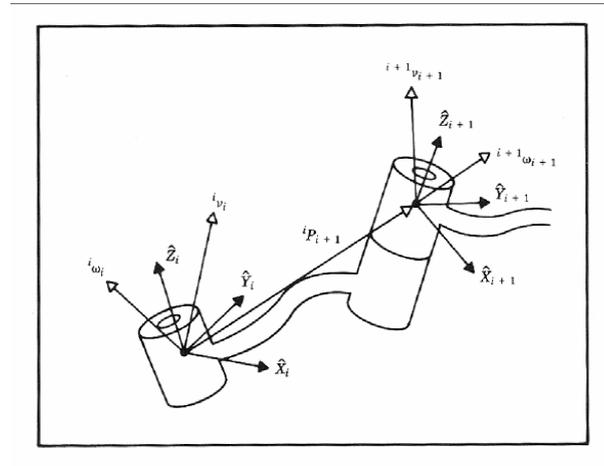
Jika kedua sisinya dikalikan dengan ${}^{i+1}R_i$, maka: ${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R_i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1}$

Kecepatan linier dari frame asal (i+1) adalah sama seperti frame asal (i) ditambahkan dengan komponen baru sebab kecepatan rotasi pada link (i).

$${}^iV_{i+1} = {}^iV_i + {}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}$$

Sehingga jika kedua sisinya dikalikan dengan ${}^{i+1}R_i$, maka:

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}R \left({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1} \right)$$



Gambar 19. Hubungan vektor kecepatan setiap link
 Sumber: John Craig (1984)

Kemudian kita peroleh,

$$\begin{aligned} {}^5v_5 &= {}^5R \left\{ \omega_4 \times {}^4p_5 + {}^4v_4 \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_4 s_{23} \dot{\theta}_1 - s_4 c_{23} \dot{\theta}_1 \\ s_4 s_{23} \dot{\theta}_1 - c_4 c_{23} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_4 s_3 a_2 \dot{\theta}_2 + s_4 a_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + s_4 c_3 a_2 \dot{\theta}_2 \\ -s_4 s_3 a_2 \dot{\theta}_2 + c_4 a_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + c_4 c_3 a_2 \dot{\theta}_2 \\ a_3 c_{23} \dot{\theta}_1 + a_2 c_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 s_3 a_2 \dot{\theta}_2 + s_4 a_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + s_4 c_3 a_2 \dot{\theta}_2 \\ a_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) - s_4 s_3 a_2 \dot{\theta}_2 + c_4 a_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + c_4 c_3 a_2 \dot{\theta}_2 \\ -a_4 s_4 s_{23} \dot{\theta}_1 + a_4 c_4 c_{23} \dot{\theta}_1 + a_3 c_{23} \dot{\theta}_1 + a_2 c_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_4 s_3 a_2 \dot{\theta}_2 + s_4 a_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + s_4 c_3 a_2 \dot{\theta}_2 \\ a_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) - s_4 s_3 a_2 \dot{\theta}_2 + c_4 a_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + c_4 c_3 a_2 \dot{\theta}_2 \\ -a_4 s_4 s_{23} \dot{\theta}_1 + a_4 c_4 c_{23} \dot{\theta}_1 + a_3 c_{23} \dot{\theta}_1 + a_2 c_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Menggunakan metode matriks jacobian

Dalam pemodelan robotik, matriks jacobian dapat digunakan untuk memperoleh persamaan gerak. Bentuk dasarnya adalah sbb:

$$\dot{X} = J \dot{\theta}$$

dimana X = matriks x pada koordinat Cartesian, $\dot{\theta}$ = matriks $\dot{\theta}$ pada koordinat ruang sendi/sudut dan J = matriks jacobian. Matriks ini dapat juga dimanfaatkan sebagai matriks transformasi antara kecepatan linier titik koordinat Cartesian dengan kecepatan sudut sendi.

$$\frac{dx}{dt} = J \frac{d\theta}{dt} \quad \text{atau} \quad \dot{x} = J \dot{\theta}$$

Maka matriks inversnya

$$\dot{\theta} = J^{-1} \dot{X}$$

Untuk kecepatan linear dan rotasi dapat digunakan determinan jacobian pada *end effector* yaitu dengan menggunakan:

$${}^N \dot{X} = {}^N J(\theta) \dot{\theta} \quad (11)$$

Persamaan di atas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$${}^N \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^N v_N \\ {}^N \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dots \\ \dot{\theta}_N \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Dengan menyusun kembali diperoleh:

Karena $s_4 = 0$ (kondisi singular), dimana $\theta_4 = 0^0$ dan 180^0

$$= 4 \{ (c_4^2 s_3 a_2 a_3 a_4^2 c_4 c_{23} + c_4^2 s_3^2 a_2 a_3^2 a_4 c_{23} + c_4^2 s_3 a_2^2 a_3 a_4 a_4 c_2) - (c_4^2 s_3 a_2 a_4^2 c_{23} + c_4 s_3 a_2 a_4 a_3 c_{23} + c_4 s_3 a_2^2 a_4 c_2) \} = 0$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{z}}{-a_4 s_4 s_{23} + a_4 c_4 c_{23} + a_3 c_{23} + a_2 c_2}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{x}}{c_4 s_3 a_2 + s_4 a_3 + s_4 c_3 a_2}$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\dot{y} - [(a_4 - s_4 s_3 a_2 + c_4 a_3 + c_4 c_3 a_2)(\theta_2) + (a_4 \theta_4)]}{a_4 + c_4 a_3}$$

$$\dot{\theta}_4 = \frac{\dot{y} - [(a_4 - s_4 s_3 a_2 + c_4 a_3 + c_4 c_3 a_2)(\theta_2) + (a_4 + c_4 a_3)\theta_3]}{a_4}$$

Trajektori Manipulator

Trajektori adalah lintasan yang merupakan jalur beroperasinya suatu robot. Berikut adalah *script* untuk trajektori manipulator yang dikerjakan pada program matlab 6.

Dan untuk hasilnya dapat kita lihat pada gambar berikut dimana hasil yang terbentuk berupa huruf A.

Kesimpulan

Kami telah menjelaskan pada uraian sebelumnya tentang skil robot lengan untuk *class painting* dengan empat derajat kebebasan (4 DOF), beserta spesifikasi teknis dengan menggunakan metode Jacobian, dengan persamaan kinematik dari manipulator tiap link dapat ditulis seperti di bawah ini:

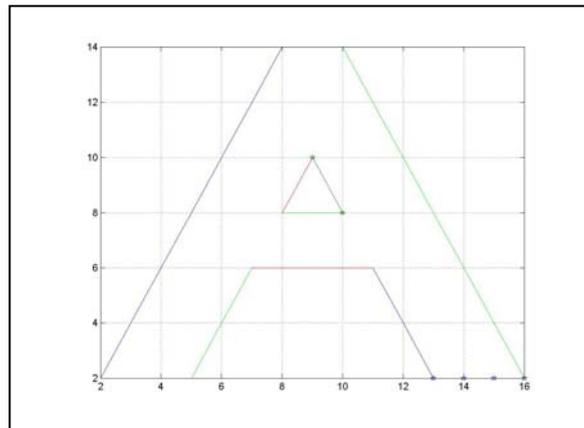
$$\theta_1 = \frac{\dot{z}}{-a_4 s_4 s_{23} + a_4 c_4 c_{23} + a_3 c_{23} + a_2 c_2}$$

$$\theta_2 = \frac{x}{c_4 s_3 a_2 + s_4 a_3 + s_4 c_3 a_2}$$
$$\theta_3 = \frac{y - [(a_4 - s_4 s_3 a_2 + c_4 a_3 + c_4 c_3 a_2)(\theta_2) + (a_4 \theta_4)]}{a_4 + c_4 a_3}$$
$$\theta_4 = \frac{y - [(a_4 - s_4 s_3 a_2 + c_4 a_3 + c_4 c_3 a_2)(\theta_2) + (a_4 + c_4 a_3)\theta_3]}{a_4}$$

Adapun trajektori yang digunakan adalah berbentuk huruf A dan H. Dengan Simulasi robot pengecatan yang didesain adalah kecepatan 0.04 m/detik dengan jarak pengecatan 10 cm.

DAFTAR PUSTAKA

1. Craig, John. 1989. *Introduction to Robotics: Mechanism & Control*. Addison: Wesley
2. F.U, K.S., R.C. Gonzalez, C.S.G. Lee. 1987. *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*. United States of America: McGraw-Hill, Inc.
3. Groover, Mikell P., Mitchell Weiss, Roger N. Nagel, dan Nicholas G. Odrey. 1988. *Industrial Robotics: Technology, Programming, and Applications*. Virginia: Reston Publishing Company, Inc.
4. Hartanto, Thomas Wahyu Dwi dan Y. Wahyu Agung Prasetyo. 2004. *Analisis dan Desain Sistem Kontrol dengan Matlab*. Yogyakarta: Andi.
5. Kreyszig, Erwin. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan Edisi ke-6*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.
6. Pitowarno, Endra. *Disain, 2006. Kontrol, dan Kecerdasan Buatan*. Yogyakarta: Andi.
7. Rony, Peter R., Karl E. Rony dan Paul A. Rony. 1985. *Introduction to Robot Programming in Basic*. Virginia: Reston Publishing Company, Inc.
8. Rosen, Jacob 2001. Model of Robot Manipulation. Department of Electrical Engineering University of Washington.



Gambar 21. Contoh trajektori berbentuk huruf A untuk kelas *skill painting robot*